

Mémoire de Master 2
Abélianisation de la cohomologie galoisienne
non abélienne

Giancarlo Lucchini Arteché

Sous la direction de David Harari

Université Paris Sud

Juin 2010

Table des matières

Introduction	3
Notations	5
1 Cohomologie galoisienne	7
1.1 Dimension cohomologique	7
1.2 Module dualisant	9
1.3 Cohomologie galoisienne : Généralités	10
1.4 Cohomologie galoisienne des corps de nombres	12
1.5 Cohomologie galoisienne des corps p -adiques, dualité de Tate-Nakayama	14
2 Cohomologie non abélienne	18
2.1 Premières définitions	18
2.2 Espaces homogènes et 1-cohomologie relative	18
2.3 Torsion	20
2.4 Suites exactes I	22
2.5 \mathfrak{g} -liens	26
2.6 2-cohomologie non abélienne	27
2.7 Morphismes	31
2.8 2-cohomologie relative	33
2.9 Suites Exactes II	34
3 Hypercohomologie	37
3.1 Définitions et propriétés	37
3.2 Hypercohomologie non abélienne : Degrés -1 et 0	39
3.3 Modules croisés	40
3.4 1-hypercohomologie non abélienne	41
3.5 Suites exactes et quasi-isomorphismes	42
4 Abélianisation de la cohomologie galoisienne non abélienne	45
4.1 Groupe fondamental algébrique	45
4.2 Cohomologie galoisienne abélienne	46
4.3 Le foncteur \mathcal{H}^i	47
4.4 Cohomologie galoisienne relative	48
4.5 Les applications d'abélianisation ab^0 et ab^1	50
4.6 k -liens	52
4.7 2-cohomologie galoisienne non abélienne	54
4.8 Classes neutres et groupes réductifs	56
4.9 L'application d'abélianisation ab^2	57
5 Quelques principes de Hasse	60
5.1 Propriétés de ab^2	60
5.2 Un principe de Hasse pour H^2	64
5.3 Un principe de Hasse pour les espaces homogènes	66
Références	70

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de présenter les idées d'abélianisation de la cohomologie galoisienne non abélienne données par M. Borovoi dans [Bo2] et [Bo1]. Pour montrer ses applications, on s'intéresse surtout au cas de degré 2, qui est développé dans [Bo1].

Pour \mathfrak{g} un groupe profini et A un \mathfrak{g} -groupe, les ensembles de cohomologie non abélienne $H^0(\mathfrak{g}, A)$ et $H^1(\mathfrak{g}, A)$ sont définis, c.f. [Se1, Chapitre 1, §5]. Serre lui même reconnaît dans son livre qu'il ne se risquerait pas en essayant de définir des ensembles de cohomologie non abélienne en degrés plus hauts, même pas en degré 2.

Or, il se trouve que, en laissant tomber la notion de \mathfrak{g} -groupe et en introduisant celle de \mathfrak{g} -lien (voir la Section 2.5 pour la définition), qui est un peu plus générale, les ensembles de 2-cohomologie non abélienne peuvent être définis d'une façon assez raisonnable. Springer introduit ces notions dans [Sp1]. Il définit, pour κ un \mathfrak{g} -lien sur un groupe A , l'ensemble $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$. Lorsque A est en plus un \mathfrak{g} -groupe, pour B un sous-groupe de A , il définit les ensembles de cohomologie relative $H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ et $H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A)$. Ces ensembles peuvent figurer dans des suites exactes. Par exemple,

Proposition 0.0.1 (Corollaire 2.9.1.1). *Soit B un sous-groupe \mathfrak{g} -invariant de A . Alors la suite*

$$1 \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\iota^0} H^0(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p^0} H^0(\mathfrak{g}, A/B) \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathfrak{g}, B) \\ \xrightarrow{\iota_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A, B) \xrightarrow{\delta^1} H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A) \xrightarrow{\iota_*^2} H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa),$$

est exacte.

On donne dans les Sections 2.4 et 2.9 la bonne notion de suite exacte, car ici on n'a pas forcément des groupes, mais des ensembles pointés, et en plus, on trouve dans ces suites des "fausses" applications, i.e. des relations entre deux ensembles que l'on note par le symbole \dashrightarrow .

Springer utilise ces idées dans le cadre de la cohomologie galoisienne non abélienne des groupes algébriques pour analyser les espaces homogènes sur un corps k de dimension cohomologique ≤ 1 . Borovoi s'est inspiré de ces idées pour montrer encore plus de résultats sur ces espaces sur un corps local non archimédien ou un corps de nombres.

Pour G un groupe algébrique connexe réductif sur un corps k de caractéristique 0, Borovoi définit les groupes abéliens $H_{\text{ab}}^i(k, G)$ pour $i \geq -1$. Ces groupes sont liées aux ensembles de cohomologie galoisienne non abélienne. En effet, dans [Bo2], il définit pour $i = 0, 1$ les applications

$$\text{ab}^i : H^i(k, G) \rightarrow H_{\text{ab}}^i(k, G).$$

En plus, si l'on note \bar{k} la clôture algébrique de k et \bar{G} est un \bar{k} -groupe connexe réductif, on peut définir la notion de k -lien, qui est une espèce d'équivalent à la notion de \mathfrak{g} -lien dans le cadre de la cohomologie galoisienne (c.f. la Section 4.6 pour la définition). Pour $L = (\bar{G}, \kappa)$ un tel k -lien, Borovoi définit dans [Bo1] le groupe abélien $H_{\text{ab}}^2(k, L)$, qui se trouve être le même que $H_{\text{ab}}^2(k, G)$ pour une certaine k -forme de \bar{G} , et l'application

$$\text{ab}^2 : H^2(k, L) \rightarrow H_{\text{ab}}^2(k, L).$$

Dans le cas où k est un corps local ou un corps de nombres, on peut se servir de cette application pour montrer un résultat du type principe de Hasse pour les ensembles de 2-cohomologie galoisienne non abélienne (c.f. Section 5.2). Ceci nous permet de montrer un principe de Hasse pour les espaces homogènes sur H un groupe semi-simple simplement connexe. A savoir,

Théorème 0.0.2 (Théorème 5.3.2). *Soit k un corps de nombres, \mathcal{V} son ensemble de places, H un k -groupe semi-simple simplement connexe et X un espace homogène à droite sur H . Supposons que le stabilisateur \bar{G} d'un point $x \in X(\bar{k})$ est connexe et que pour le tore $\bar{G}^{\text{tor}} = \bar{G}/\bar{G}^{\text{ss}}$ (voir les notations plus en bas) et sa k -forme G^{tor} (définie dans la Section 5.1) au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) $\text{III}^2(k, G^{\text{tor}}) = 0$;
- (ii) G^{tor} est quasi-trivial ;
- (iii) $G_{k_v}^{\text{tor}}$ est k_v -anisotrope pour une certaine place v de k ;
- (iv) G^{tor} est déployé sur une extension cyclique de k ;
- (v) G^{tor} est de dimension 1.
- (vi) $\bar{G}^{\text{tor}} = 1$;
- (vii) \bar{G} est semi-simple.

Alors le principe de Hasse est vérifié pour X , i.e. si $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place $v \in \mathcal{V}$, alors $X(k) \neq \emptyset$.

Dans la Partie 1, on donne quelques rappels sur la cohomologie galoisienne classique en suivant le livre de Serre [Se1]. On montre en particulier la dualité de Tate-Nakayama dans le cas fini (Théorème 1.5.5) et on donne l'idée de la démonstration dans le cas général (Théorème 1.5.6).

Dans la Partie 2 on suit l'article de Springer [Sp1]. On définit les ensembles de cohomologie relative et de 2-cohomologie non abélienne. Pour cela, on définit la notion de \mathfrak{g} -lien mentionné plus en haut. En particulier, dans les Sections 2.4 et 2.9 on donne quelques suites exactes que l'on peut former avec ces ensembles.

La partie 3 est consacrée à l'hypercohomologie. On commence en donnant quelques rappels sur sa définition classique. On passe rapidement à l'hypercohomologie non abélienne, dont Borovoi se sert pour définir ses applications ab^0 et ab^1 . Ces applications sont définies dans la première moitié de la Partie 4 (Sections 4.1-4.5). On en donne quelques propriétés, mais en général sans démonstrations, car notre attention est dirigée surtout vers ab^2 . On suit ici [Bo2].

Finalement, dans la Section 4.6 on définit les k -liens, ce qui nous fait entrer dans l'article de Borovoi [Bo1], qu'on suit jusqu'au bout. On définit l'application ab^2 à la fin de la Partie 4. Dans la Partie 5 on applique les idées de Springer traitées dans la Partie 2 pour montrer d'une façon un peu plus détaillée certains résultats montrés par Borovoi.

Je voudrais remercier David Harari pour toujours me donner un peu de son temps (je sais qu'il n'en a jamais assez) et me donner la possibilité de travailler dans un sujet si intéressant comme celui-ci (et aussi pour corriger toujours mon français 😊). Je remercie aussi Mikhail Borovoi et T. A. Springer pour inventer des choses si jolies et bizarres.

Je remercie tous les gens de la FIMFA pour me donner la possibilité d'étudier ici à Paris. Particulièrement, je remercie Pierre Pansu, Frédéric Paulin et Laurence Vincent pour toujours essayer de faire mon séjour en France plus agréable.

Je remercie spécialement Nicolas Libedinsky, pour me montrer le chemin en faisant 5 ans avant que moi tout ce que j'ai fait.

Finalement, je voudrais remercier avec tout mon coeur, mes parents pour me donner leur support dès le début et Carolina, ma copine, pour me donner la santé mentale qu'il fallait pour finir le travail, en écoutant mes plaintes chaque nuit.

Notations

$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ sont toujours des groupes profinis, i.e. des groupes topologiques isomorphes à une limite projective de groupes finis. Dans ces groupes, il existe toujours un système de voisinages ouverts de 1 formé par des sous-groupes d'indice fini.

A, B, C, X sont toujours des \mathfrak{g} -modules, \mathfrak{g} -groupes ou \mathfrak{g} -ensembles discrets, voir la Section 2.1 pour les définitions. La notation $A^{\mathfrak{g}}$ veut toujours dire le sous-module (resp. groupe, ensemble) des éléments fixés par l'action de \mathfrak{g} .

Soit A un groupe.

L'action à gauche de A sur un ensemble X est noté $(a, x) \in A \times X \mapsto {}^a x$ et quelquefois $(a, x) \in A \times X \mapsto a \cdot x$. Les actions à droite sont toujours notés $(a, x) \in A \times X \mapsto x \cdot a$.

On note $\text{cd}(A)$ (resp. $\text{cd}_p(A)$) la dimension cohomologique (resp. p -dim. coh.) de A . Les dimensions cohomologiques strictes respectives sont notées $\text{scd}(A)$ et $\text{scd}_p(A)$. Voir la Section 1.1 pour les définitions de ces notions.

On note $A(p)$ la composante p -primaire de A .

On note $C^i(\mathfrak{g}, A)$ le groupe des applications continues de \mathfrak{g}^i dans A et lorsque A est un \mathfrak{g} -module, on note $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}, A)$ le groupe des i -cochaînes non homogènes classique. On note qu'il s'agit du même ensemble, mais les applications du i -ème groupe au $(i+1)$ -ème sont différentes. Dans le premier cas, les applications sont définies par la formule suivante

$$x \in C^i(\mathfrak{g}, A) \mapsto [(s_1, \dots, s_{i+1}) \mapsto \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^j x(s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_{i+1})],$$

où $\hat{}$ veut dire que l'on omet cette coordonnée. Pour la définition de la formule pour les cochaînes non homogènes, voir [NSW, Chapter I, §2, après la Définition 1.2.2]

On note $\text{Aut}(A)$ le groupe des automorphismes de A , $\text{Int}(A)$ le sous-groupe des automorphismes intérieurs et $\text{Out}(A)$ le quotient $\text{Aut}(A)/\text{Int}(A)$.

Pour un cocycle ψ , on note $\text{Cl}(\psi)$ sa classe de (hyper)cohomologie. On note ${}_{\psi}A$ le \mathfrak{g} -groupe tordu par ψ , défini dans la Section 2.3.

Pour une relation entre deux ensembles A et B , on note $A \multimap B$

Lorsqu'on travaille avec une catégorie dont les objets ont un élément distingué, la notion de complexe est bien définie (par exemple, dans les catégories des ensembles pointés, des groupes, des modules). Dans ces catégories, on regardera souvent un morphisme $\alpha : B \rightarrow A$ comme un complexe à deux éléments

$$\cdots \rightarrow 1 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 1 \rightarrow \cdots,$$

où B est en degré -1 et A en degré 0 . On écrit $(B \rightarrow A)$ pour un tel complexe.

k est un corps de caractéristique 0 sauf mention du contraire. \bar{k} est une clôture algébrique de k , elle est égale à la clôture séparable k_s de k . On note $\Gamma = \text{Gal}(k_s/k)$.

Lorsque k est un corps de nombres, on note $\mathcal{V} = \mathcal{V}(k)$, \mathcal{V}_{∞} et \mathcal{V}_f l'ensemble des places de k , resp. des places archimédiennes, resp. des places non archimédiennes. Pour $v \in \mathcal{V}$, on écrit

k_v le complété de k par v . Pour les applications de localisation, on utilise l'écriture

$$\begin{aligned}\mathrm{loc}_v^i &: H^i(k, G) \rightarrow H^i(k_v, G), \\ \mathrm{loc}_\infty^i &: H^i(k, G) \rightarrow \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^i(k_v, G), \\ \mathrm{loc}^i &: H^i(k, G) \rightarrow \prod_{v \in \mathcal{V}} H^i(k_v, G),\end{aligned}$$

etc...

On note par \mathbb{G}_a le groupe additif, \mathbb{G}_m le groupe multiplicatif et μ_n le groupe des racines de l'unité d'ordre divisant n . On écrit $\hat{\mathbb{Z}}(1) = \varprojlim \mu_n$.

\bar{G} est un \bar{k} -groupe, G est un k -groupe, i.e. un k -schéma en groupes séparé de type fini, et/ou une k -forme de \bar{G} . On note aussi \bar{G} le groupe $G_{\bar{k}} = G \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(\bar{k})$.

Pour G un k -groupe, on pose :

G° la composante connexe de l'élément neutre de G ;
 G^u le radical unipotent de G° ;
 $G^{\mathrm{red}} = G^\circ / G^u$, c'est un groupe réductif ;
 G^{ss} le groupe dérivé de G^{red} , c'est un groupe semi-simple ;
 $G^{\mathrm{tor}} = G^{\mathrm{red}} / G^{\mathrm{ss}}$, c'est le plus grand tore quotient de G ;
 G^{sc} le revêtement universel du groupe G^{ss} . On a le morphisme canonique

$$\rho : G^{\mathrm{sc}} \rightarrow G^{\mathrm{ss}} \rightarrow G^{\mathrm{red}}.$$

Lorsque G est réductif, on écrit G^{ad} pour G/Z , où Z est le centre de G .

Soit G un k -groupe réductif connexe et $T \subset G$ un k -tore maximal. On écrit $T^{(\mathrm{sc})}$ pour le tore maximal $\rho^{-1}(T) \subset G^{\mathrm{sc}}$. De même, on note $Z^{(\mathrm{sc})} = \rho^{-1}(Z)$. C'est le centre de G^{sc} .

Soit \bar{G} un \bar{k} -groupe. On a les mêmes définitions pour \bar{G}^{red} , \bar{G}^{ss} , etc. On définit aussi $\bar{\rho} : \bar{G}^{\mathrm{sc}} \rightarrow \bar{G}^{\mathrm{red}}$, $\bar{Z}^{(\mathrm{sc})}$ et $T^{(\mathrm{sc})}$ où \bar{Z} est le centre de \bar{G} et $T \subset \bar{G}$ est un \bar{k} -tore maximal.

Soit S un k -groupe de type multiplicatif, un tore par exemple. On note $X^*(S)$ le groupe des caractères $\mathrm{Hom}(\bar{S}, \mathbb{G}_m)$ et $X_*(S)$ le groupe des co-caractères $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, \bar{S})$.

Pour un k -groupe réductif et un k -tore déployé maximal T , on écrit $R(G, T)$ pour le système de racines de G relative à T . On note $R^\vee(G, T)$ le système de co-racines. On a $R(G, T) \subset X^*(T)$ et $R^\vee(G, T) \subset X_*(T)$.

Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien (voir la Section 4.6 pour la définition). On dit que le lien L est connexe, réductif, etc. lorsque \bar{G} l'est.

1 Cohomologie galoisienne

Dans cette partie on donne quelques rappels sur la cohomologie galoisienne classique. On se concentre rapidement sur le cas des corps p -adiques et les corps de nombres. On montre entre autres résultats la dualité de Tate-Nakayama (Théorème 1.5.6). On commence dans le cadre plus général de la cohomologie de groupes pour définir les notions de dimension cohomologique et module dualisant qui seront utilisés plus tard. Tout ce qui est dans cette section peut être retrouvé dans les livres de Serre [Se1] et [Se3]. On suppose connues les définitions de base de la cohomologie des groupes classiques. Elles peuvent être retrouvées dans [NSW, Chapter I].

1.1 Dimension cohomologique

Dans cette section on fixe p un nombre premier et \mathfrak{g} un groupe profini. Tous les \mathfrak{g} -modules sont supposés discrets.

On appelle *p -dimension cohomologique* de \mathfrak{g} la borne inférieure des entiers n tels que pour tout \mathfrak{g} -module discret de torsion A et tout $i > n$, la composante p -primaire de $H^i(\mathfrak{g}, A)$ est nulle. On note cette dimension $\text{cd}_p(\mathfrak{g})$. Si aucun $n \in \mathbb{N}$ ne vérifie cette propriété, on dit que la p -dimension cohomologique de \mathfrak{g} est $\text{cd}_p(\mathfrak{g}) = \infty$.

On définit la *dimension cohomologique* de \mathfrak{g} comme $\text{cd}(\mathfrak{g}) = \sup_p \text{cd}_p(\mathfrak{g})$.

De même, on définit la *p -dimension cohomologique stricte* de \mathfrak{g} comme la borne inférieure des $n \in \mathbb{N}$ vérifiant la même propriété, mais pour tout \mathfrak{g} -module A (il n'est pas supposé de torsion). On la note $\text{scd}_p(\mathfrak{g})$. On définit aussi $\text{scd}(\mathfrak{g}) = \sup_p \text{scd}_p(\mathfrak{g})$, c'est la *dimension cohomologique stricte* de \mathfrak{g} .

Voici quelques résultats classiques sur ces notions.

Proposition 1.1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) $\text{cd}_p(\mathfrak{g}) \leq n$.
- (ii) *On a $H^i(\mathfrak{g}, A) = 0$ pour tout $i > n$ et tout \mathfrak{g} -module discret A qui est un groupe de torsion p -primaire.*
- (iii) *On a $H^{n+1}(\mathfrak{g}, A) = 0$ pour tout \mathfrak{g} -module A discret, simple et annulé par p .*

Démonstration. Soit A un \mathfrak{g} -module de torsion et soit $A = \bigoplus_p A(p)$ sa décomposition canonique en composantes p -primaires. On voit facilement que $H^i(\mathfrak{g}, A(p))$ s'identifie à la composante p -primaire de $H^i(\mathfrak{g}, A)$, d'où l'équivalence entre (i) et (ii). C'est clair que (ii) \Rightarrow (iii). Finalement, si (iii) est vérifié, un argument de dévissage montre que $H^{n+1}(\mathfrak{g}, A) = 0$ pour A fini et annulé par une puissance de p . Le résultat s'étend par limite inductive à tout \mathfrak{g} -module discret A qui est un groupe de torsion p -primaire. En plongeant A dans le module induit $M_{\mathfrak{g}}(A)$ (c.f. [Se1, Chapitre I, 2.5] pour la définition) et en utilisant la suite exacte longue de cohomologie, on montre le résultat en raisonnant par récurrence sur i . \square

Proposition 1.1.2. *$\text{scd}_p(\mathfrak{g})$ est soit égal à $\text{cd}_p(\mathfrak{g})$, soit égal à $\text{cd}_p(\mathfrak{g}) + 1$.*

Démonstration. C'est clair que $\text{scd}_p(\mathfrak{g}) \geq \text{cd}_p(\mathfrak{g})$. Montrons alors que $\text{scd}_p(\mathfrak{g}) \leq \text{cd}_p(\mathfrak{g}) + 1$.

Soit A un \mathfrak{g} -module (discret) et $i > \text{cd}_p(\mathfrak{g}) + 1$. On note A_p et pA le noyau et l'image de la multiplication par p dans A . On a que A_p et A/pA sont des groupes de torsion p -primaires, donc $H^i(\mathfrak{g}, A_p) = H^{i-1}(\mathfrak{g}, A/pA) = 0$. Des suites exactes longues induites par les suites

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow A_p \rightarrow A \rightarrow pA \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow pA \rightarrow A \rightarrow A/pA \rightarrow 0, \end{aligned}$$

on obtient que les applications $H^i(\mathfrak{g}, A) \rightarrow H^i(\mathfrak{g}, pA)$ et $H^i(\mathfrak{g}, pA) \rightarrow H^i(\mathfrak{g}, A)$ sont injectives. Alors la multiplication par p dans $H^i(\mathfrak{g}, A)$ est injective, ce qui entraîne $H^i(\mathfrak{g}, A)(p) = 0$, donc $\text{scd}_p(\mathfrak{g}) \leq \text{cd}_p(\mathfrak{g}) + 1$. \square

Proposition 1.1.3. *Soit \mathfrak{h} un sous-groupe fermé de \mathfrak{g} . On a*

$$\begin{aligned} \text{cd}_p(\mathfrak{h}) &\leq \text{cd}_p(\mathfrak{g}), \\ \text{scd}_p(\mathfrak{h}) &\leq \text{scd}_p(\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

avec égalité dans les cas suivants :

- (i) $(\mathfrak{g} : \mathfrak{h})$ est fini et premier à p .
- (ii) \mathfrak{h} est ouvert dans \mathfrak{g} et $\text{cd}_p(\mathfrak{g}) < \infty$.

Démonstration. On ne démontre que le cas des cd_p . Si A est un \mathfrak{h} -module de torsion, $M_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{h}}(A)$ est un \mathfrak{g} -module de torsion aussi et $H^i(\mathfrak{g}, M_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{h}}(A)) = H^i(\mathfrak{h}, A)$ (c'est le lemme de Shapiro, c.f. [Se1, Chapitre I, 2.5]). L'inégalité $\text{cd}_p(\mathfrak{h}) \leq \text{cd}_p(\mathfrak{g})$ en découle.

Dans le cas (i), l'inégalité en sens inverse vient du fait que le morphisme de restriction

$$\text{Res} : H^i(\mathfrak{g}, A) \rightarrow H^i(\mathfrak{h}, A)$$

est injectif sur les composantes p -primaires, c.f. [Se1, Chapitre I, 2.4].

Dans le cas (ii), l'inégalité en sens inverse est donnée par la surjectivité du morphisme de corestriction

$$\text{Cor} : H^i(\mathfrak{h}, A) \rightarrow H^i(\mathfrak{g}, A)$$

pour $i = \text{cd}_p(\mathfrak{g})$, c.f. [Se1, Chapitre I, 3.3, Lemme 4]. \square

Corollaire 1.1.3.1. *Si \mathfrak{g}_p est un p -groupe de Sylow de \mathfrak{g} , alors*

$$\text{cd}_p(\mathfrak{g}) = \text{cd}_p(\mathfrak{g}_p) = \text{cd}(\mathfrak{g}_p) \quad \text{et} \quad \text{scd}_p(\mathfrak{g}) = \text{scd}_p(\mathfrak{g}_p) = \text{scd}(\mathfrak{g}_p).$$

Démonstration. C'est clair d'après la Proposition 1.1.3. \square

Corollaire 1.1.3.2. *Supposons que $\text{cd}_p(\mathfrak{g}) = n < \infty$. On a alors $\text{scd}_p(\mathfrak{g}) = n$ si et seulement si pour tout sous-groupe ouvert \mathfrak{h} de \mathfrak{g} on a $H^{n+1}(\mathfrak{h}, \mathbb{Z})(p) = 0$.*

Démonstration. C'est clair que $\text{scd}_p(\mathfrak{g}) = n$ implique la deuxième propriété. Supposons donc que celle-ci est vérifiée. On a alors $H^{n+1}(\mathfrak{g}, A)(p) = 0$ pour tout \mathfrak{g} -module A qui est isomorphe à un $M_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{h}}(\mathbb{Z}^m)$ avec $m \in \mathbb{N}$. Or, tout \mathfrak{g} -module B de type fini sur \mathbb{Z} est isomorphe à un quotient A/C d'un tel A . Comme $H^{n+2}(\mathfrak{g}, C)(p) = 0$, on en déduit que $H^{n+1}(\mathfrak{g}, B)(p) = 0$. On conclut en étendant ce résultat par limite inductive. \square

Proposition 1.1.4. *Soit \mathfrak{h} un sous-groupe distingué fermé de \mathfrak{g} . On a l'inégalité*

$$\text{cd}_p(\mathfrak{g}) \leq \text{cd}_p(\mathfrak{h}) + \text{cd}_p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}).$$

Démonstration. On utilise la suite spectrale de Hochschild-Serre (c.f. [NSW, Chapter I, Theorem 2.1.5])

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H^j(\mathfrak{h}, A)) \Rightarrow H^{i+j}(\mathfrak{g}, A).$$

Soit A un \mathfrak{g} -module de torsion et $n > \text{cd}_p(\mathfrak{h}) + \text{cd}_p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Si $i + j = n$, soit $i > \text{cd}_p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$, soit $j > \text{cd}_p(\mathfrak{h})$, donc la composante p -primaire de $E_2^{i,j}$ est nulle dans les deux cas. Alors la composante p -primaire de $H^n(\mathfrak{g}, A)$ est nulle, ce qui conclut. \square

Proposition 1.1.5. *Soit \mathfrak{g} un pro- p -groupe, i.e. un groupe profini dont tous les quotients finis sont des p -groupes. Alors tout \mathfrak{g} -module simple et annulé par p est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Soit A un tel module. C'est clair que A est fini. En effet, il suffit de considérer le sous-module engendré par un élément, qui est exactement A d'après la simplicité de A . Comme A est annulé par p et le stabilisateur de cet élément est ouvert (car l'action de \mathfrak{g} est continue), donc d'indice fini, on obtient que ce sous-module est fini. On peut alors considérer A comme un $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ module, où \mathfrak{h} est un sous-groupe ouvert distingué convenable de \mathfrak{g} . On peut supposer alors que \mathfrak{g} est un p -groupe fini. Dans ce cas l'énoncé est un résultat bien connu (c.f. par exemple [Se3, Chapter IX, Theorem 2]). \square

Proposition 1.1.6. *Soit \mathfrak{g} un pro- p -groupe et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\text{cd}_p(\mathfrak{g}) \leq n$ si et seulement si $H^{n+1}(\mathfrak{g}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$.*

Démonstration. Ceci est immédiat des Propositions 1.1.1 et 1.1.5. \square

1.2 Module dualisant

Dans cette section on définit le module dualisant d'un groupe profini \mathfrak{g} . On suit presque textuellement [Se1, Chapitre I, 3.5].

On note $C_{\mathfrak{g}}^f$ (resp. $C_{\mathfrak{g}}^t$) la catégorie des \mathfrak{g} -modules discrets qui sont des groupes finis (resp. des groupes de torsion). La catégorie $C_{\mathfrak{g}}^t$ s'identifie à la catégorie $\varinjlim C_{\mathfrak{g}}^f$ des limites inductives d'objets de $C_{\mathfrak{g}}^f$.

On note \mathbf{Ab} la catégorie des groupes abéliens. Pour $M \in \mathbf{Ab}$, on écrit $M^* = \text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. On munit ce groupe de la topologie de la convergence simple (où \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est muni de la topologie discrète). Lorsque M est un groupe de torsion (resp. fini), son dual M^* est profini (resp. fini). Il se trouve qu'on a une équivalence de catégories entre \mathbf{Ab} et la catégorie opposée à celle des groupes profinis commutatifs (c'est la dualité de Pontrjagin, c.f. [NSW, Theorem 1.1.8]).

Proposition 1.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On fait les hypothèses suivantes :*

- (i) $\text{cd}_p(\mathfrak{g}) \leq n$.
- (ii) *Pour tout $A \in C_{\mathfrak{g}}^f$, le groupe $H^n(\mathfrak{g}, A)$ est fini.*

Alors le foncteur $A \mapsto H^n(\mathfrak{g}, A)^$ est représentable sur $C_{\mathfrak{g}}^f$ par un élément I de $C_{\mathfrak{g}}^t$, i.e. il existe $I \in C_{\mathfrak{g}}^t$ tel que l'on a un isomorphisme de foncteurs $\text{Hom}^{\mathfrak{g}}(A, I) \xrightarrow{\sim} H^n(\mathfrak{g}, A)^*$, où $A \in C_{\mathfrak{g}}^f$.*

Démonstration. Posons $S(A) = H^n(\mathfrak{g}, A)$ et $T(A) = H^n(\mathfrak{g}, A)^*$. L'hypothèse (i) et la suite exacte longue de cohomologie nous disent que S est un foncteur covariant exact à droite de $C_{\mathfrak{g}}^f$ dans \mathbf{Ab} , l'hypothèse (ii) nous dit qu'il est à valeurs dans \mathbf{Ab}^f , la sous-catégorie des groupes finis. Comme dans ce cas le foncteur $(\)^*$ est exact, on en déduit que T est un foncteur contravariant exact à gauche de $C_{\mathfrak{g}}^f$ dans \mathbf{Ab} . Le résultat découle alors du lemme suivant.

Lemme 1.2.2. *Soit \mathbf{C} une catégorie abélienne noethérienne et soit $T : \mathbf{C}^{\circ} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un foncteur contravariant exact à gauche de \mathbf{C} dans \mathbf{Ab} . Alors T est représentable par un objet de $\varinjlim \mathbf{C}$.*

On rappelle qu'une catégorie noethérienne est une catégorie qui est petite et telle que tous ses objets sont noethériens, i.e. toute suite croissante de sous-objets est stationnaire. Pour une esquisse de la démonstration de ce lemme, voir [Se1, Chapitre I, 3.5, Lemme 6]. \square

La démonstration du Lemme 1.2.2 nous donne un élément canonique $i \in T(I) = H^n(\mathfrak{g}, I)^*$. L'application $\text{Hom}^{\mathfrak{g}}(A, I) \rightarrow H^n(\mathfrak{g}, I)^*$ associée à $f \in \text{Hom}^{\mathfrak{g}}(A, I)$ le morphisme

$$H^n(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{f^*} H^n(\mathfrak{g}, I) \xrightarrow{i} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Le module I est appelé le *module dualisant* de \mathfrak{g} pour la dimension n . Il est déterminé à isomorphisme près. Plus précisément, le couple (I, i) est déterminé à isomorphisme unique près.

Proposition 1.2.3. *Si I est module dualisant pour \mathfrak{g} , I est aussi module dualisant pour tout sous-groupe ouvert \mathfrak{h} de \mathfrak{g} .*

Démonstration. Si $A \in C_{\mathfrak{h}}^f$, on a $M_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{h}}(A) \in C_{\mathfrak{g}}^f$ et $H^n(\mathfrak{g}, M_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{h}}(A)) = H^n(\mathfrak{h}, A)$. On voit clairement alors que $H^n(\mathfrak{h}, A)$ est dual de $\text{Hom}^{\mathfrak{g}}(M_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{h}}(A), I)$, qui est fonctoriellement équivalent à $\text{Hom}^{\mathfrak{h}}(A, I)$, donc I est bien un module dualisant pour \mathfrak{h} . \square

Proposition 1.2.4. *Supposons $n \geq 1$. Alors $\text{scd}_p(\mathfrak{g}) = n + 1$ si et seulement si il existe un sous-groupe ouvert \mathfrak{h} de \mathfrak{g} tel que $I^{\mathfrak{h}}$ (le sous-module des invariants par \mathfrak{h}) contienne un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.*

Démonstration. $I^{\mathfrak{h}}$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ si et seulement si $\text{Hom}^{\mathfrak{h}}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, I) \neq 0$, ce qui équivaut à $H^n(\mathfrak{h}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \neq 0$. Or, $H^n(\mathfrak{h}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est la composante p -primaire de $H^n(\mathfrak{h}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, qui est isomorphe à $H^{n+1}(\mathfrak{h}, \mathbb{Z})$ d'après la suite exacte longue de cohomologie induite par la suite

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

et le fait que $n \geq 1$. La proposition découle alors du Corollaire 1.1.3.2. \square

1.3 Cohomologie galoisienne : Généralités

On fixe dans cette section k un corps de caractéristique 0. On remarque que la majorité des résultats donnés ici restent vrais pour un corps quelconque.

Soit K une extension galoisienne de k . Dans le cas où l'extension est infinie, cela veut dire que K est la réunion de ses sous-extensions galoisiennes finies. On note $\text{Gal}(K/k)$ le groupe de Galois correspondant. C'est un groupe profini, et alors la théorie classique de la cohomologie des groupes s'applique pour tout $\text{Gal}(K/k)$ -groupe discret. Dans le cadre le plus général, on dispose d'un foncteur $K \mapsto A(K)$ défini sur la catégorie des extensions algébriques séparables de k et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens (pour la cohomologie non abélienne, ça sera la catégorie des groupes). Ce foncteur doit vérifier les conditions suivantes :

- (i) Pour K/k galoisienne, $A(K)$ a une structure de $\text{Gal}(K/k)$ -groupe.
- (ii) $A(K) = \varinjlim A(K_i)$ où les K_i sont les sous-extensions finies de K .
- (iii) Si $K \rightarrow L$ est une injection, le morphisme induit $A(K) \rightarrow A(L)$ l'est aussi.
- (iv) Si $K \subset L$ sont des extensions de k avec L galoisienne, $A(K)$ s'identifie à $H^0(\text{Gal}(L/K), A(L)) = A(L)^{\text{Gal}(L/K)}$, le sous-groupe de $A(L)$ des éléments $\text{Gal}(L/K)$ -invariants.

Remarque.

On note que dans la dernière condition, $A(L)$ a bien une structure de $\text{Gal}(L/K)$ -groupe, car $\text{Gal}(L/K)$ s'identifie à un sous-groupe de $\text{Gal}(L/k)$. Si on note k_s la clôture galoisienne de k , on voit grâce à cette dernière condition que la connaissance de $A(k_s)$ équivaut à celle du foncteur A .

Pour un foncteur A vérifiant ces propriétés et une extension galoisienne L/K , les groupes $H^i(\text{Gal}(L/K), A(L))$ sont définis. On les notera $H^i(L/K, A)$. Pour tout automorphisme du groupe $\text{Gal}(k_s/k)$ on a des automorphismes induits sur $H^i(k_s/k, A)$. On peut démontrer (c.f. [Se3, Chapter X, Proposition 5]) que ces isomorphismes sont en fait indépendants du choix de l'automorphisme de $\text{Gal}(k_s/k)$. On peut alors oublier le choix de la clôture séparable et écrire tout simplement $H^i(k, A)$. Ces groupes dépendent fonctoriellement de k .

On rappelle la définition des groupes de cohomologie modifiés de Tate. Pour \mathfrak{g} un groupe fini, on a le morphisme

$$N : A \rightarrow A, a \mapsto \sum_{s \in \mathfrak{g}} s a.$$

On note $I_{\mathfrak{g}}A$ le sous-module engendré par les éléments de la forme $sa - a$ pour $a \in A$, $s \in \mathfrak{g}$. On a clairement $I_{\mathfrak{g}}A \subset \text{Ker}(N)$ et $\text{Im}(N) \subset A^{\mathfrak{g}}$. On pose alors,

$$\begin{aligned}\hat{H}^i(\mathfrak{g}, A) &= H^i(\mathfrak{g}, A) \quad \text{si } i \geq 1, \\ \hat{H}^0(\mathfrak{g}, A) &= A^{\mathfrak{g}}/\text{Im}(N), \\ \hat{H}^{-1}(\mathfrak{g}, A) &= \text{Ker}(N)/I_{\mathfrak{g}}A, \\ \hat{H}^i(\mathfrak{g}, A) &= H_{1-i}(\mathfrak{g}, A) \quad \text{si } i \leq -2.\end{aligned}$$

Lorsque \mathfrak{g} est un groupe profini, on définit ces groupes comme $\hat{H}^i(\mathfrak{g}, A) := \varinjlim \hat{H}^i(\mathfrak{g}/U, A^U)$, où U parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de \mathfrak{g} .

Soient $\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m, \text{GL}_n$ les foncteurs groupe additif, groupe multiplicatif et groupe n -linéaire respectivement.

Proposition 1.3.1. *Pour toute extension galoisienne K de k et tout $i \geq 1$, on a $H^i(K/k, \mathbb{G}_a) = 0$. En effet, lorsque K/k est finie, on a même $\hat{H}^i(K/k, \mathbb{G}_a) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Montrons le résultat pour une extension finie. Dans ce cas, le théorème de la base normale nous dit que K est un $\text{Gal}(K/k)$ -module induit, donc cohomologiquement trivial (c.f. [Se3, Chapter IX, §3]). \square

Proposition 1.3.2. *Pour toute extension galoisienne finie K de k et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H^1(K/k, \text{GL}_n(K)) = 0$. En particulier, le cas $n = 1$ donne $H^1(K/k, \mathbb{G}_m) = 0$.*

Démonstration. Soit a un cocycle dans $H^1(K/k, \text{GL}_n(K))$, $c \in M_n(K)$ une matrice. On pose

$$b = \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K/k)} a_{\sigma}^{\sigma} c,$$

et on voit facilement que l'on a ${}^{\sigma}b = a_{\sigma}^{-1}b$, i.e. a est un cobord si l'on peut choisir c de façon que b soit inversible. Or, comme K est infini, l'indépendance linéaire des caractères nous dit que c'est bien le cas. \square

Remarque.

En général $H^i(K/k, \mathbb{G}_m) \neq 0$ pour $i \geq 2$. En particulier, pour $i = 2$, on sait que l'on a un isomorphisme canonique $H^2(k, \mathbb{G}_m) \cong \text{Br}(k)$, où $\text{Br}(k)$ est le groupe de Brauer de k (c.f. [Se3, Chapter X, Proposition 9]).

Corollaire 1.3.2.1. *Soit $n \geq 1$ et μ_n le groupe des racines n -ièmes de l'unité (voir notations au début). On a*

$$H^1(k, \mu_n) = k^*/k^{*n}.$$

Démonstration. Comme on est en caractéristique 0, on a la suite exacte

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{(\)^n} \mathbb{G}_m \rightarrow 1,$$

d'où la suite exacte de cohomologie

$$k^* \xrightarrow{(\)^n} k^* \rightarrow H^1(k, \mu_n) \rightarrow H^1(k, \mathbb{G}_m).$$

Le résultat découle alors de la nullité de $H^1(k, \mathbb{G}_m)$. \square

1.4 Cohomologie galoisienne des corps de nombres

On analyse dans cette section la dimension cohomologique des corps de nombres et on donne un petit rappel sur les applications de localisation loc_v^i , pour $v \in \mathcal{V}$ (voir notations au début). On note $\Gamma = \text{Gal}(k_s/k)$ et $\Gamma_K = \text{Gal}(k_s/K)$ pour K une extension algébrique de k .

On commence en donnant un critère de p -dimension cohomologique pour Γ dans un cadre plus général.

Proposition 1.4.1. *On suppose ici que k est un corps de caractéristique $\neq p$. Soit $n \geq 1$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i) $\text{cd}_p(\Gamma) \leq n$,
- (ii) *Pour toute extension algébrique K de k on a $H^{n+1}(K, \mathbb{G}_m)(p) = 0$ et le groupe $H^n(K, \mathbb{G}_m)$ est p -divisible.*
- (iii) *Pour toute extension K de k finie, séparable et de degré premier à p , on a $H^{n+1}(K, \mathbb{G}_m)(p) = 0$ et le groupe $H^n(K, \mathbb{G}_m)$ est p -divisible.*

Démonstration. Soit μ_p le groupe des racines p -ièmes de l'unité. On a la suite exacte

$$1 \rightarrow \mu_p \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{(\)^p} \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

La suite exacte longue de cohomologie nous dit que la condition (ii) (resp, (iii)) est équivalente à dire que $H^{n+1}(K, \mu_p) = 0$ pour K une extension algébrique (resp. finie, séparable, de degré premier à p) de k .

Supposons donc que $\text{cd}_p(\Gamma) \leq n$. Comme Γ_K est isomorphe à un sous-groupe de Γ , on a bien $\text{cd}_p(\Gamma_K) \leq n$ (c.f. Proposition 1.1.3), donc $H^{n+1}(K, \mu_p) = 0$. On a alors (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii). Montrons que (iii) \Rightarrow (i). Soit Γ_p un p -groupe de Sylow de Γ , i.e. un sous-groupe fermé de Γ qui est un pro- p -groupe tel que pour tout sous-groupe Δ de Γ contenant Γ_p , l'indice de Γ_p dans Δ soit premier à p . Soit K/k l'extension correspondante. On a

$$K = \varinjlim K_i,$$

où K_i parcourt l'ensemble des extensions finies séparables de k de degré premier à p . D'après (iii) on a $H^{n+1}(K_i, \mu_p) = 0$ pour tout i , donc $H^{n+1}(K, \mu_p) = H^{n+1}(\Gamma_p, \mu_p) = 0$. Or, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et μ_p sont isomorphes comme Γ_p -modules (Γ_p agit trivialement sur les deux car il est un pro- p -groupe). Alors la Proposition 1.1.6 nous dit que $\text{cd}(\Gamma_p) \leq n$, d'où $\text{cd}_p(\Gamma) \leq n$. \square

On fixe maintenant k une extension algébrique de \mathbb{Q} . On note que dans ce cas $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Pour $v \in \mathcal{V}$, on pose

$$n_v(k) = \text{ppcm}[(k_i)_v : \mathbb{Q}_v],$$

où k_i parcourt l'ensemble des extensions finies de \mathbb{Q} contenues dans k et v veut dire que l'on prend la complétion par rapport à la place v (c.f. notations au début). C'est un nombre *surnaturel*, i.e. il peut avoir des puissances infinies dans sa décomposition en facteurs premiers (c.f. [Se1, Chapitre I, 1.3]).

Proposition 1.4.2. *Soit p un nombre premier. On suppose que $p \neq 2$ ou bien que k est totalement imaginaire (i.e. il n'a pas de places réelles). Si pour toute place non archimédienne v de k l'exposant de p dans le degré local $n_v(k)$ est infini, on a $\text{cd}_p(\Gamma) \leq 1$.*

Démonstration. Serre montre (c.f. [Se1, Chapitre II, Proposition 9]) que pour un corps vérifiant ces hypothèses, la composante p -primaire de $\text{Br}(k)$ est nulle. On voit facilement que toutes les extensions finies de k vérifient aussi les hypothèses, donc on a $H^2(K, \mathbb{G}_m)(p) = 0$ pour toute extension finie K de k . D'autre part, la Proposition 1.3.2 nous dit que $H^1(K, \mathbb{G}_m) = 0$. Le résultat découle alors de la Proposition 1.4.1. \square

Lemme 1.4.3. *Pour tout nombre premier p il existe une extension abélienne K de \mathbb{Q} dont le groupe de Galois est isomorphe à \mathbb{Z}_p et dont les degrés locaux $n_v(K)$ sont égaux à p^∞ pour toute place non archimédienne $v \in \mathcal{V}_f(K)$.*

Comme K est galoisienne sur \mathbb{Q} , le degré local $n_v(K)$ pour $v \in \mathcal{V}_f(K)$ ne dépend que de la place induite sur \mathbb{Q} , laquelle ne dépend que d'un nombre premier ℓ . On notera alors $n_\ell(K)$ au lieu de $n_v(K)$.

Démonstration. Soit $\mathbb{Q}(p)$ le corps obtenu de \mathbb{Q} en rajoutant les racines de l'unité d'ordre une puissance de p . On sait que le groupe de Galois de cette extension s'identifie canoniquement au groupe U_p des unités du corps \mathbb{Q}_p , qui est le produit direct d'un groupe fini et du groupe \mathbb{Z}_p . De plus, le groupe de décomposition D_ℓ d'un nombre premier ℓ est égal à U_p si $\ell = p$, et à l'adhérence du sous-groupe de U_p engendré par ℓ si $\ell \neq p$ (c.f. [Se3, Chapter IV, §4]). Dans tous les cas, on voit que D_ℓ est infini. Alors $n_\ell(\mathbb{Q}(p))$, qui est l'ordre de D_ℓ , doit être divisible par p^∞ . C'est clair que ceci est encore vérifié par le sous-corps K de $\mathbb{Q}(p)$ des éléments fixés par le sous-groupe de torsion de U_p . On a alors $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_p$ et $n_\ell(K) = p^\infty$ pour tout premier ℓ , ce qui donne l'extension voulue. \square

Ce lemme nous aide à montrer le résultat suivant sur la dimension cohomologique de Γ lorsque k est un corps de nombres.

Proposition 1.4.4. *Soit k un corps de nombres et $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Si $p \neq 2$, ou si k est totalement imaginaire, on a $\text{cd}_p(\Gamma) \leq 2$.*

On dit qu'un tel corps de nombres est de p -dimension ≤ 2 .

Démonstration. Soit K un corps comme celui du Lemme 1.4.3 et soit $L = Kk$. Le groupe $\text{Gal}(L/k)$ s'identifie à un sous-groupe fermé d'indice fini du groupe $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_p$, il est donc isomorphe à \mathbb{Z}_p et les degrés locaux $n_v(L)$ sont divisibles par p^∞ . La Proposition 1.4.2 nous dit alors que $\text{cd}_p(\Gamma_L) \leq 1$. D'autre part, on a $\text{cd}_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ (c'est un pro- p -groupe libre, c.f. [Se1, Chapitre I, 1.5, 3.4]), donc $\text{cd}_p(\Gamma) \leq 2$ d'après la Proposition 1.1.4. \square

On conclut cette section avec un petit rappel sur les applications de localisation.

Pour k un corps de nombres et $v \in \mathcal{V}(k)$ une place, on a que le groupe $\Gamma_v = \text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$ s'identifie au sous-groupe de décomposition D_v de $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Pour A un Γ -module, le changement de base $k \rightarrow k_v$ nous donne, avec cette inclusion, les morphismes

$$\text{loc}_v^i : H^i(k, A) \rightarrow H^i(k_v, A),$$

pour $i \in \mathbb{N}$. Ce sont les applications de restriction pour l'inclusion $\Gamma_v \hookrightarrow \Gamma$ (c.f. [Se3, Chapter VII, §5]). Ces applications ne dépendent pas de l'inclusion choisie, c.f. [Se3, Chapter X, Proposition 5].

Ces applications peuvent être définies au moyen des cocycles. Pour un i -cocycle $a : \Gamma^i \rightarrow A(\bar{k})$, on définit son image $\text{loc}_v^i(a)$ dans $Z^i(k_v, A)$ comme la composition

$$\text{loc}_v^i(a) : \Gamma_v^i \hookrightarrow \Gamma^i \xrightarrow{a} A(\bar{k}) \hookrightarrow A(\bar{k}_v).$$

On voit facilement que cette application passe au quotient et donne les applications $H^i(k, A) \rightarrow H^i(k_v, A)$.

Lorsque v est une place archimédienne, on conviendra que l'application loc_v^0 est à valeurs dans le groupe de 0-cohomologie modifié $\hat{H}^0(k_v, A)$, i.e. on compose le morphisme que l'on vient de définir avec la projection $H^0(k_v, A) \rightarrow \hat{H}^0(k_v, A)$. On fait un abus de notation en notant $\text{loc}_v^0 : H^0(k, A) \rightarrow H^0(k_v, A)$ de toute façon.

On a parlé toujours des *applications* loc^i . On a fait ceci car il se trouve que ces définitions restent valables pour la cohomologie non abélienne en degrés 0 et 1, qui font partie du sujet de la Partie 2. Dans le cadre de la cohomologie classique les loc^i sont des morphismes de groupes.

1.5 Cohomologie galoisienne des corps p -adiques, dualité de Tate-Nakayama

On passe maintenant aux corps p -adiques. Ici on a beaucoup plus de résultats que pour les corps de nombres. Le résultat important de cette section est la dualité de Tate Nakayama (Théorème 1.5.6)

On commence avec la dimension cohomologique des corps locaux à corps résiduel fini, i.e. un corps p -adique ou un corps de séries formelles à coefficients dans un corps fini. Soit k un tel corps et soit \mathbb{F} son corps résiduel. On note $\Gamma = \text{Gal}(k_s/k)$ et $\Gamma_{\mathbb{F}} = \text{Gal}(\mathbb{F}_s/\mathbb{F})$.

Proposition 1.5.1. *Pour tout premier p on a*

$$\text{cd}_p(\Gamma) \leq \text{cd}_p(\Gamma_{\mathbb{F}}) + 1.$$

Il y a égalité lorsque $\text{cd}_p(\Gamma_{\mathbb{F}}) < \infty$ et p est distinct de la caractéristique de k .

Démonstration. On considère l'extension non ramifiée maximale k^{nr} de k . Le groupe de Galois de cette extension s'identifie à $\Gamma_{\mathbb{F}}$. D'autre part, le groupe de Galois de l'extension k_s/k^{nr} est de dimension cohomologique ≤ 1 (c.f. [Se3, Chapter V, Proposition 7] et [Se1, Chapitre II, Proposition 5]). La Proposition 1.1.4 nous dit alors que $\text{cd}_p(\Gamma) \leq 1 + \text{cd}_p(\Gamma_{\mathbb{F}})$.

Lorsque $\text{cd}_p(\Gamma_{\mathbb{F}}) = n < \infty$ et p est premier à la caractéristique de k , on se ramène au cas où Γ est un pro- p -groupe (c.f. Corollaire 1.1.3.1). On calcule alors $H^{n+1}(\Gamma, \mu_p)$ en utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre. Comme $\text{cd}_p(\Gamma_{\mathbb{F}}) = n$ et $\text{cd}_p(\text{Gal}(k_s/k^{nr})) \leq 1$, on trouve

$$H^{n+1}(\Gamma, \mu_p) = H^n(\Gamma_{\mathbb{F}}, H^1(\text{Gal}(k_s/k^{nr}), \mu_p)) = H^n(\Gamma_{\mathbb{F}}, (k^{nr})^*/(k^{nr})^{*p}).$$

La valuation de k^{nr} définit un homomorphisme surjectif

$$(k^{nr})^*/(k^{nr})^{*p} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

d'où on obtient un homomorphisme surjectif $H^n(\Gamma_{\mathbb{F}}, (k^{nr})^*/(k^{nr})^{*p}) \rightarrow H^n(\Gamma_{\mathbb{F}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Ceci nous dit que $H^{n+1}(\Gamma, \mu_p) \neq 0$ et donc $\text{cd}_p(\Gamma) \geq n + 1$, ce qui donne l'égalité cherchée. \square

Corollaire 1.5.1.1. *Si \mathbb{F} est fini, alors on a $\text{cd}_p(\Gamma) = 2$ pour tout p distinct de la caractéristique de k . En particulier $\text{cd}(k) = 2$ lorsque k est un corps p -adique.*

Démonstration. En effet, dans ce cas $\Gamma_{\mathbb{F}} = \hat{\mathbb{Z}}$, donc $\text{cd}_p(\Gamma_{\mathbb{F}}) = 1$ pour tout p , car les p -sous-groupes de Sylow de $\hat{\mathbb{Z}}$ sont isomorphes à \mathbb{Z}_p , qui est un pro- p -groupe libre, donc de p -dimension cohomologique 1, c.f. [Se1, Chapitre I, 1.5, 3.4]. \square

On fixe dans la suite k un corps p -adique et \mathbb{F} son corps résiduel. C'est un corps fini de caractéristique p .

Lemme 1.5.2. *On a $H^1(k, \mu_n) = k^*/k^{*n}$, $H^2(k, \mu_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $H^i(k, \mu_n) = 0$ pour $i \geq 3$. En particulier, tous les $H^i(k, \mu_n)$ sont des groupes finis.*

Démonstration. On a la suite exacte

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{(\)^n} \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

On sait que $H^0(k, \mathbb{G}_m) = k^*$, $H^1(k, \mathbb{G}_m) = 0$ et $H^2(k, \mathbb{G}_m) = \text{Br}(k) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (c.f. [Se3, Chapitre XIII, Proposition 6]). La suite exacte longue de cohomologie nous donne alors le résultat pour $i = 1, 2$. Pour $i \geq 3$ c'est évident d'après le dernier corollaire. \square

Proposition 1.5.3. *Si A est un Γ -module fini, $H^n(k, A)$ est fini pour tout n .*

Démonstration. A est isomorphe comme groupe à un produit direct des groupes de la forme μ_n . On voit facilement qu'il existe une extension finie K de k telle que A et cette somme soient des Γ_K -modules avec action triviale, donc isomorphes. D'après le Lemme 1.5.2, on a que $H^j(K, A)$ est fini pour tout j . La suite spectrale

$$H^i(\mathrm{Gal}(K/k), H^j(K, A)) \Rightarrow H^n(k, A),$$

nous dit alors que $H^n(k, A)$ est fini pour tout n . \square

La finitude des groupes $H^2(k, A)$ nous donne l'existence du module dualisant pour Γ , c.f. Section 1.2. On le note I .

Théorème 1.5.4. *Le module dualisant I est isomorphe au module μ , réunion des μ_n , $n \geq 1$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit I_n le sous-module de I formé des éléments annulés par n . On sait que I est module dualisant pour tout Δ sous-groupe de Γ , et $\mathrm{Hom}^\Delta(\mu_n, I_n) = \mathrm{Hom}^\Delta(\mu_n, I)$ s'identifie au dual de $H^2(\Delta, \mu_n)$, qui est à la fois isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'après le Lemme 1.5.2. En particulier, le résultat est indépendant de Δ . On trouve alors $\mathrm{Hom}(\mu_n, I_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec action triviale de Γ . Or, μ_n étant un groupe cyclique d'ordre n et I_n étant un groupe de n -torsion, on voit que $\mathrm{Hom}(\mu_n, I_n) = I_n$ comme groupes (il suffit de prendre l'image d'un générateur de μ_n). Alors I_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme groupe, donc à μ_n comme Γ -module, car le générateur de $\mathrm{Hom}(\mu_n, I_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est alors un isomorphisme Γ -invariant. En passant à la limite, on trouve l'isomorphisme voulu. \square

Corollaire 1.5.4.1. *Le groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ est de dimension cohomologique stricte égal à 2.*

Démonstration. La Proposition 1.2.4 nous dit que ceci est vérifié si et seulement si pour tout sous-groupe ouvert (donc d'indice fini) Δ de Γ , le module μ^Δ ne contient pas un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ pour tout p premier. Or, si K est l'extension finie de k associée à Δ , on a $\mu^\Delta = \mu \cap K$ et on sait bien que c'est un ensemble fini, car K est aussi un corps p -adique. Le résultat en découle. \square

On peut maintenant énoncer la dualité de Tate-Nakayama. On commence par le cas des Γ -modules finis.

Théorème 1.5.5 (Dualité de Tate-Nakayama, cas fini). *Soit A un Γ -module fini, et posons*

$$A^\vee = \mathrm{Hom}(A, \mu) = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_m).$$

Alors pour $i = 0, 1, 2$ le cup-produit

$$H^i(k, A) \times H^{2-i}(k, A^\vee) \rightarrow H^2(k, \mu) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

met en dualité les groupes finis $H^i(k, A)$ et $H^{2-i}(k, A^\vee)$.

Démonstration. Pour $i = 2$ c'est simplement la définition du module dualisant d'après le Théorème 1.5.4. Pour $i = 0$, il suffit de changer les rôles de A et A^\vee , car $(A^\vee)^\vee = A$. Finalement, pour $i = 1$ il suffit de montrer l'injectivité du morphisme

$$H^1(k, A) \rightarrow H^1(k, A^\vee)^* = \mathrm{Hom}(H^1(k, A^\vee), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

car la surjectivité découle en changeant encore une fois A et A^\vee . Plongeons alors A dans un Γ -module injectif B , de façon que le morphisme $H^1(k, A) \rightarrow H^1(k, B)$ soit nul (les modules

injectifs sont cohomologiquement triviaux, c.f. [Se3, Chapter IX, §3]). En posant $C = B/A$, on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} H^0(k, B) & \longrightarrow & H^0(k, C) & \xrightarrow{\delta} & H^1(k, A) \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ H^2(k, B^\vee)^* & \longrightarrow & H^2(k, C^\vee)^* & \longrightarrow & H^1(k, A^\vee)^*. \end{array}$$

Comme α et β sont des bijections et δ est surjectif, on trouve que γ est injectif, ce qui conclut. \square

Soit maintenant A un Γ -module de type fini sur \mathbb{Z} . Son dual $A^\vee = \text{Hom}(A, \mathbb{G}_m)$ est le groupe des \bar{k} -points d'un groupe algébrique défini sur k . Lorsque A est fini, ce groupe l'est aussi ; et lorsque A est libre sur \mathbb{Z} , A^\vee est un tore avec A comme groupe des caractères.

Théorème 1.5.6 (Dualité de Tate-Nakayama). *Considérons le cup-produit*

$$\theta_i : H^i(k, A) \times H^{2-i}(k, A^\vee) \rightarrow H^2(k, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

- (i) *Soit $H^0(k, A)^\wedge$ le complété du groupe abélien $H^0(k, A)$ pour la topologie des sous-groupes d'indice fini. L'application θ_0 met en dualité le groupe compact $H^0(k, A)^\wedge$ et le groupe discret $H^2(k, A^\vee)$.*
- (ii) *L'application θ_1 met en dualité les groupes finis $H^1(k, A)$ et $H^1(k, A^\vee)$.*
- (iii) *Le groupe $H^0(k, A^\vee)$ peut être canoniquement muni d'une structure de groupe analytique p -adique ; soit $H^0(k, A^\vee)^\wedge$ son complété pour la topologie des sous-groupes ouverts d'indice fini. L'application θ_2 met en dualité le groupe discret $H^2(k, A)$ et le groupe compact $H^0(k, A^\vee)^\wedge$.*

Démonstration. On ne donne qu'une esquisse de preuve trouvée dans [Se1, Chapitre II, 5.8] qui est dévissée en quatre parties. Pour une preuve complète, on pourra regarder [NSW, Theorem 7.2.9].

(i) **Cas où $A = \mathbb{Z}$.**

Dans ce cas on a $A^\vee = \mathbb{G}_m$ et l'action de Γ sur \mathbb{Z} est triviale. Pour (i), on note que $H^0(k, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, donc $H^0(k, \mathbb{Z})^\wedge = \hat{\mathbb{Z}}$ et $H^2(k, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Alors θ_0 devient clairement une dualité. Pour (ii), on sait que $H^1(k, \mathbb{G}_m) = 0$, et d'autre part on a $H^1(k, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) = 0$. Pour (iii), on utilise la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

pour en tirer l'isomorphisme $H^2(k, \mathbb{Z}) \cong H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ de la suite exacte longue de cohomologie. On rappelle que \mathbb{Q} est cohomologiquement trivial, car il est divisible (donc injectif). La théorie du corps de classes local montre que le groupe $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est dual du complété de $k^* = H^0(k, \mathbb{G}_m)$ pour la topologie des sous-groupes ouverts d'indice fini.

(ii) **Cas où $A = \mathbb{Z}[\Gamma']$ avec Γ' quotient fini de Γ .**

Soit Δ le sous-groupe de Γ tel que $\Gamma' = \Gamma/\Delta$ et soit K l'extension finie de k correspondant à Δ . On a clairement $A = M_{\Gamma'}^\Delta(\mathbb{Z})$, donc $H^i(k, A) = H^i(K, \mathbb{Z})$. De même, on a $H^i(k, A^\vee) = H^i(K, \mathbb{G}_m)$, ce qui nous ramène au cas précédent. Il faut vérifier la compatibilité du cup-produit avec les morphismes de modules et les applications de restriction. Ceci est fait par exemple dans [NSW, Propositions 1.4.2, 1.5.3].

(iii) **Finitude de $H^1(k, A)$ et $H^1(k, A^\vee)$.**

Lorsque A est fini, le résultat découle de la Proposition 1.5.3. Par dévissage, on est ramené au cas où A est libre sur \mathbb{Z} . L'action de Γ sur A étant continue et définie par son action sur un

ensemble (fini) de générateurs, on voit qu'il existe un sous-groupe ouvert Δ qui opère trivialement sur A . Soit K l'extension finie de k correspondante. On a $H^1(K, A) = \text{Hom}(\Delta, A) = 0$, d'où $H^1(k, A) = H^1(K/k, A)$ en utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre. C'est clair que le groupe $H^1(K/k, A)$ est fini, d'où la finitude de $H^1(k, A)$. Celle de $H^1(k, A^\vee)$ découle de la dualité elle-même (On remarque qu'on n'utilise pas cette finitude pour montrer la dualité).

(iv) **Cas général.**

On écrit A comme quotient L/R , où L est un $\mathbb{Z}[\Gamma']$ -module libre de type fini et Γ' est un quotient fini de Γ . D'après (ii), la dualité est vraie pour L et on a en plus $H^1(k, L) = H^1(k, L^\vee) = 0$. On regarde les suites exactes longues de cohomologie induites par les suites

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow R \rightarrow L \rightarrow A \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow A^\vee \rightarrow L^\vee \rightarrow R^\vee \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ces suites longues se coupent chacune en deux morceaux. On obtient alors les diagrammes à lignes exactes suivants

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(k, A) & \longrightarrow & H^2(k, R) & \longrightarrow & H^2(k, L) & \longrightarrow & H^2(k, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(k, A^\vee)^* & \longrightarrow & H^0(k, R^\vee)^* & \longrightarrow & H^0(k, L^\vee)^* & \longrightarrow & H^0(k, A^\vee)^* & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(k, R^\vee) & \longrightarrow & H^2(k, A^\vee) & \longrightarrow & H^2(k, L^\vee) & \longrightarrow & H^2(k, R^\vee) & \longrightarrow & 0 \\ & & \beta_1 \downarrow & & \beta_2 \downarrow & & \beta_3 \downarrow & & \beta_4 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(k, A)^* & \longrightarrow & H^0(k, R)^* & \longrightarrow & H^0(k, L)^* & \longrightarrow & H^0(k, A)^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Les flèches verticales sont bien sûr celles induites par les applications θ_i . On note pour l'exactitude des lignes que le foncteur $(\)^*$ est exact sur la catégorie des groupes abéliens localement compacts qui sont totalement discontinus et dénombrables à l'infini.

Il nous faut montrer alors que les morphismes α_1 , α_4 et β_2 sont bijectifs. D'après la partie (ii), on a que α_3 est bijectif. On en déduit que α_4 est surjective. Ce résultat est alors applicable à tout Γ -module. En particulier en l'appliquant à R on obtient alors que α_2 est surjectif, d'où on obtient que α_4 est injective et par conséquent α_2 l'est aussi. Maintenant c'est évident que α_1 est bijectif.

On passe au deuxième diagramme. On a maintenant que β_1 et β_3 sont bijectives d'après ce qu'on a déjà fait. Ceci nous dit que β_2 est injective, donc β_4 l'est aussi. Cela nous dit que β_2 est bijective, ce qui conclut. \square

2 Cohomologie non abélienne

Dans cette partie on définira les ensembles de cohomologie non abélienne classiques $H^0(\mathfrak{g}, A)$ et $H^1(\mathfrak{g}, A)$, et aussi les ensembles de 2-cohomologie non abélienne $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ et de cohomologie relative $H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ et $H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A)$ définis par Springer . On en donnera quelques propriétés, dont quelques suites exactes.

2.1 Premières définitions

\mathfrak{g} est toujours un groupe profini. Un \mathfrak{g} -ensemble est un ensemble X muni d'une action continue de \mathfrak{g} (i.e. à stabilisateur ouvert en chaque point). Un \mathfrak{g} -groupe A est un \mathfrak{g} -ensemble qui en plus est un groupe dont la loi de composition est \mathfrak{g} -invariante, c'est à dire

$${}^s(ab) = {}^s a {}^s b, \quad a, b \in A, s \in \mathfrak{g}.$$

Un \mathfrak{g} -morphisme entre deux \mathfrak{g} -ensembles (resp. deux \mathfrak{g} -groupes) est une application (resp. un morphisme de groupes) commutant avec les actions respectives de \mathfrak{g} . On remarque que lorsque A est abélien, la notion de \mathfrak{g} -groupe coïncide avec la notion classique de \mathfrak{g} -module.

Soit A un \mathfrak{g} -ensemble. On définit $H^0(\mathfrak{g}, A)$ comme l'ensemble des éléments \mathfrak{g} -invariants de A , i.e. $H^0(\mathfrak{g}, A) = A^{\mathfrak{g}} = \{a \in A \mid {}^s a = a, \forall s \in \mathfrak{g}\}$. On note que lorsque A est un groupe, $H^0(\mathfrak{g}, A)$ a une structure naturelle de groupe (et même de \mathfrak{g} -groupe avec l'action triviale).

Si A est maintenant un \mathfrak{g} -groupe, on définit un 1-cocycle de \mathfrak{g} dans A comme une fonction continue $a : \mathfrak{g} \rightarrow A$ vérifiant l'égalité

$$a_{st} = a_s {}^s a_t.$$

On appelle $Z^1(\mathfrak{g}, A)$ l'ensemble des 1-cocycles. Deux tels applications a, a' sont dites cohomologues s'il existe $b \in A$ tel que $a'_s = b^{-1} a_s b$. C'est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient est par définition l'ensemble de 1-cohomologie et est noté $H^1(\mathfrak{g}, A)$.

Remarques.

L'application triviale $\mathfrak{g} \rightarrow A, s \mapsto 1$ est clairement un cocycle. L'ensemble $H^1(\mathfrak{g}, A)$ est alors un ensemble pointé avec la classe de cette application comme élément distingué.

Les ensembles $H^0(\mathfrak{g}, A)$ et $H^1(\mathfrak{g}, A)$ sont fonctoriels en A , i.e. un \mathfrak{g} -morphisme $A \rightarrow B$ induit des morphismes $H^i(\mathfrak{g}, A) \rightarrow H^i(\mathfrak{g}, B)$ dans les catégories respectives (ensembles ou groupes pour $i = 0$, ensembles pointés pour $i = 1$).

Lorsque A est un groupe abélien, ces définitions coïncident avec les groupes de cohomologie classiques.

2.2 Espaces homogènes et 1-cohomologie relative

Soit A un \mathfrak{g} -groupe. Un espace homogène (à droite) sur A est un \mathfrak{g} -ensemble X muni d'une action à droite de A qui est transitive et \mathfrak{g} -équivariante, i.e. qui vérifie l'équation

$${}^s(x \cdot a) = {}^s x \cdot {}^s a.$$

Un morphisme d'espaces homogènes est une application qui commute avec les actions de A et \mathfrak{g} . Un tel morphisme est un isomorphisme s'il est bijectif.

Soit X un espace homogène sur A et soit $x \in X$. Le stabilisateur de x dans A est appelé le groupe d'isotropie de x . Notons ce groupe par B . On note que comme l'action est transitive, tout groupe d'isotropie d'un élément de X est un conjugué de B .

Définition 2.2.1. Soit B un sous-groupe quelconque de A . On définit l'ensemble de 1-cohomologie relative de A par rapport à B comme l'ensemble des classes d'isomorphisme des espaces homogènes sur A qui ont B comme groupe d'isotropie d'un de ses points. On le note $H^1(\mathfrak{g}, A, B)$.

Notons que lorsque B est un sous-groupe \mathfrak{g} -invariant de A , $H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ devient un ensemble pointé. En effet, on trouve comme élément distingué la classe du \mathfrak{g} -ensemble $B \setminus A$ avec actions évidentes de A et \mathfrak{g} . D'autre part, $H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ peut être vide. Pour que ceci ne soit pas le cas, il faut imposer quelques conditions sur B . Regardons ça plus en détail :

Soit $X \in H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ et $x \in X$ tel que B soit son groupe d'isotropie. La transitivité de l'action de A nous donne l'existence, pour tout $s \in \mathfrak{g}$ d'un élément $a_s \in A$ vérifiant ${}^s x = x \cdot a_s$. Le stabilisateur \mathfrak{h} de x dans \mathfrak{g} étant ouvert (on rappelle que l'action de \mathfrak{g} est continue), on voit que l'on peut choisir les a_s de façon que $s \mapsto a_s$ soit une application continue (par exemple, en choisissant $a_s = a_t$ si $s\mathfrak{h} = t\mathfrak{h}$). On a alors pour $b \in B$, $s, t \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} x \cdot a_s &= {}^s x = {}^s(x \cdot b) = {}^s x \cdot {}^s b = x \cdot a_s {}^s b \\ x \cdot a_{st} &= {}^{st} x = {}^s(x \cdot a_t) = x \cdot a_s {}^s a_t; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} {}^s B &= a_s^{-1} B a_s, \\ a_s {}^s a_t a_s^{-1} &\in B. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

On appelle une application continue $\mathfrak{g} \rightarrow A$ vérifiant ces deux dernières propriétés un 1-cocycle relatif et l'on notera $Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$ l'ensemble de ces applications. On omettra le mot *relatif* lorsqu'il n'y ait pas de confusion possible. Nous allons expliquer maintenant la similitude entre ces notations et celles de la section précédente.

Soit N le normalisateur de B dans A . Deux applications $a, a' \in Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$ sont dites cohomologues s'il existe $n \in N$ tel que $a' \in B n^{-1} a_s {}^s n$. C'est une relation d'équivalence qu'on appellera R .

Proposition 2.2.2. *Il y a une bijection canonique $\varepsilon : H^1(\mathfrak{g}, A, B) \rightarrow Z^1(\mathfrak{g}, A, B)/R$. En particulier, $H^1(\mathfrak{g}, A, B) \neq \emptyset$ si et seulement si il existe une application continue $\mathfrak{g} \rightarrow A$ vérifiant les égalités (2.2.1).*

Avant de montrer la proposition, notons que dans le cas où $B = \{1\}$, l'ensemble $Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$ est exactement le $Z^1(\mathfrak{g}, A)$ de la section précédente et R coïncide avec la relation définie sur cet ensemble. On a trouvé alors une deuxième définition de l'ensemble $H^1(\mathfrak{g}, A)$ comme l'ensemble des classes d'isomorphismes des espaces homogènes sur A à stabilisateur trivial. Ces espaces sont appelés *espaces homogènes principaux*.

Démonstration. Soit X un espace homogène sur A et $x \in X$ tel que B soit son groupe d'isotropie. On a construit plus en haut une application $a = (a_s) \in Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$. On définit alors $\varepsilon(X) = \text{Cl}(a)$. Montrons que ceci est bien défini. D'abord, a est défini par x à multiplication à gauche par un élément de B près. D'autre part, si on choisit un autre point $y \in X$ avec le même stabilisateur, on a $y = x \cdot n$ pour certain $n \in N$, donc une application $a'' = n^{-1} b_s a_s {}^s n = b'_s n^{-1} a_s {}^s n$ avec $b_s, b'_s \in B$. On voit alors que a et a'' sont cohomologues, donc ε est bien définie.

L'injectivité est claire. En fait, si $X, Y \in H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ ont la même image par ε , en faisant un bon choix des points $x \in X$, $y \in Y$ et des applications définies par ces points, on peut supposer que tous les deux induisent la même application a . Alors on a un isomorphisme

évident $X \rightarrow Y, x \cdot a' \mapsto y \cdot a'$ pour $a' \in A$.

Pour la surjectivité on se donne $a \in Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$. On pose $X = B \setminus A$. L'action de A est claire. On définit l'action de \mathfrak{g} comme ${}^s(Ba') = Ba_s {}^s a'$ pour $a' \in A$. On vérifie que ceci donne à X une structure d'espace homogène sur A . En effet, le seul point non évident à vérifier est que l'action soit bien définie. Or, en utilisant les égalités (2.2.1) on trouve, pour $s, t \in \mathfrak{g}$, $a' \in A$, $b \in B$ et certain $b' \in B$,

$$\begin{aligned} {}^s(Bba') &= Ba_s {}^s b' {}^s a' = Ba_s (a_s^{-1} b' a_s) {}^s a' = Ba_s {}^s a' = {}^s(Ba'), \\ {}^s({}^t(Ba')) &= {}^s(Ba_t {}^t a') = Ba_s {}^s a_t {}^{st} a' = Ba_{st} {}^{st} a' = {}^{st}(Ba'). \end{aligned}$$

En prenant $x = B$, on voit clairement que son stabilisateur est B et que l'application définie par ce point est exactement a . \square

On peut aller encore un peu plus loin avec cette comparaison entre la 1-cohomologie classique et la relative.

Proposition 2.2.3. *Si B est un sous-groupe distingué \mathfrak{g} -invariant de A , on a l'équivalence $H^1(\mathfrak{g}, A, B) = H^1(\mathfrak{g}, A/B)$.*

Démonstration. En effet, sous ces hypothèses, la première équation de (2.2.1) devient triviale et la deuxième donne exactement la condition de cocycle sur A/B . Finalement, $a'_s \in Bn^{-1}a_s {}^s n$, $n \in N$ devient exactement la formule $\overline{a'_s} = \overline{na_s n^{-1}}$, $n \in A$ lorsqu'on se restreint à A/B , ce qui est bien la relation d'équivalence dans $Z^1(\mathfrak{g}, A/B)$. \square

2.3 Torsion

On définit maintenant l'outil de la torsion par un cocycle, qu'on utilisera dans la suite.

On fixe un \mathfrak{g} -groupe A et un \mathfrak{g} -espace X muni d'une action \mathfrak{g} -équivariante à gauche de A . Pour un espace homogène principal à droite P sur A (i.e. un élément de $H^1(\mathfrak{g}, A)$), on définit la relation d'équivalence sur $P \times X$ qui identifie (p, x) avec $(pa, a^{-1}x)$. La relation est compatible avec l'action de \mathfrak{g} , car les actions de A sur P et X le sont. le quotient est alors un \mathfrak{g} -ensemble, noté $P \times^A X$ ou ${}_P X$. Les éléments de cet ensemble sont notés px , ce qui est bien justifié car $(p \cdot a)x = p(a \cdot x)$. Cet ensemble est appelé le *tordu* de X par P , car il s'agit en fait du même ensemble avec une autre structure de \mathfrak{g} -ensemble (une structure "tordue"). En effet, pour $p \in P$ on a la bijection $X \rightarrow {}_P X, x \mapsto px$.

Toute cette construction peut se faire aussi du point de vue des cocycles. Pour cela, soit $a \in Z^1(\mathfrak{g}, A)$. On définit une nouvelle structure de \mathfrak{g} -ensemble sur X par la formule

$${}^{s*a}x = a_s \cdot {}^s x.$$

On note ${}_a X$ cet ensemble. C'est le tordu de X par a .

Montrons que ces deux définitions de torsion sont équivalentes. C'est facile : P étant un espace homogène sur A , on trouve, pour un certain $p \in P$, un cocycle a vérifiant ${}^s p = p \cdot a_s$. Alors les \mathfrak{g} -ensembles ${}_a X$ et ${}_P X$ sont isomorphes, car l'application $x \mapsto px$ est bijective (on l'a déjà vu) et un morphisme de \mathfrak{g} -ensembles :

$$p^{s*a}x = p(a_s \cdot {}^s x) = (p \cdot a_s) {}^s x = {}^s p {}^s x = {}^s(px).$$

Notons en particulier que ceci nous évite de montrer que la torsion par un cocycle cohomologue donne un \mathfrak{g} -ensemble isomorphe. On remarque que cet isomorphisme n'est pas en général canonique.

Proposition 2.3.1. *Pour $a \in Z^1(\mathfrak{g}, A)$, la torsion par a présente les propriétés suivantes :*

- (i) ${}_a X$ est fonctoriel en X (pour des A -morphisms $X \rightarrow X'$).
- (ii) On a ${}_a(X \times X') = {}_a X \times {}_a X'$.
- (iii) Si un autre \mathfrak{g} -groupe B agit à droite sur X (de façon compatible avec \mathfrak{g}), alors il agit aussi sur ${}_a X$.
- (iv) Si X a une structure de \mathfrak{g} -groupe invariante par A , alors ${}_a X$ avec la même structure est aussi un \mathfrak{g} -groupe.

Démonstration. On ne montre que les deux dernières affirmations (les autres étant faciles à vérifier).

Pour la propriété (iii), il suffit d'écrire, pour $x \in X$, $b \in B$ et $s \in \mathfrak{g}$,

$${}^{s*a}(x \cdot b) = a_s \cdot {}^s(x \cdot b) = a_s \cdot {}^s x \cdot {}^s b = {}^{s*a} x \cdot {}^s b.$$

Et pour la propriété (iv), on voit que, pour $x, y \in X$ et $s \in \mathfrak{g}$,

$${}^{s*a}(xy) = a_s \cdot {}^s(xy) = a_s \cdot ({}^s x {}^s y) = (a_s \cdot {}^s x)(a_s \cdot {}^s y) = {}^{s*a} x {}^{s*a} y.$$

□

Exemple 2.3.2.

Si $X = B \triangleleft A$, alors A agit sur B par automorphismes intérieurs de façon compatible avec \mathfrak{g} . La propriété (iv) de la dernière proposition nous dit alors que ${}_a B$ est un \mathfrak{g} -groupe. Cette action tordue de \mathfrak{g} sur B est donnée par la formule

$${}^{s*a} b = a_s {}^s b a_s^{-1}.$$

On peut faire même mieux. Avec les mêmes hypothèses, on peut tordre B par un cocycle à valeurs dans A/C , où C est le centre de A (ou même le centralisateur de B). En effet, si $\bar{a} \in Z^1(\mathfrak{g}, A/C)$ est un cocycle, alors pour a relevant \bar{a} dans A , l'action est définie par la même formule. On voit clairement que ceci ne dépend pas de l'application a choisie. Notons que ceci s'applique en particulier lorsque $B = A$.

Proposition 2.3.3. *Soit X un \mathfrak{g} -ensemble muni d'une action \mathfrak{g} -équivariante à gauche de A . Soit a un 1-cocycle dans A . Alors ${}_a A$ agit sur ${}_a X$ de façon compatible avec \mathfrak{g} .*

Démonstration. Ceci se vérifie directement. On a, pour $b \in A$, $x \in X$ et $s \in \mathfrak{g}$.

$${}^{s*a}(b \cdot x) = a_s \cdot {}^s(b \cdot x) = a_s {}^s b \cdot {}^s x = a_s {}^s b a_s^{-1} \cdot (a_s \cdot {}^s x) = {}^{s*a} b \cdot {}^{s*a} x.$$

□

La torsion nous sera utile pour calculer les fibres des morphismes qu'on trouvera dans la section suivante. Le résultat central pour cela est le suivant.

Proposition 2.3.4. *Soit $a \in Z^1(\mathfrak{g}, A)$. On a une bijection*

$$t_a : Z^1(\mathfrak{g}, {}_a A, B) \rightarrow Z^1(\mathfrak{g}, A, B), b = (b_s) \mapsto (b_s a_s).$$

Cette bijection passe au quotient par R et définit une bijection

$$\tau_a : H^1(\mathfrak{g}, {}_a A, B) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, A, B).$$

On rappelle que lorsque $B = 1$, ceci s'applique en particulier aux ensembles classiques $Z^1(\mathfrak{g}, A)$ et $H^1(\mathfrak{g}, A)$.

Démonstration. D'après (2.2.1), on a

$$\begin{aligned} {}^{s*a}B &= b_s^{-1}Bb_s, \\ b_s {}^{s*a}b_t b_{st}^{-1} &\in B. \end{aligned}$$

En utilisant ceci et l'égalité $a_s {}^s a_t a_{st}^{-1} = 1$, on trouve

$$\begin{aligned} (b_s a_s)^{-1} B (b_s a_s) &= a_s^{-1} b_s^{-1} B b_s a_s = a_s^{-1} {}^{s*a} B a_s = {}^s B, \\ b_s a_s {}^s (b_t a_t) (b_{st} a_{st})^{-1} &= b_s a_s {}^s b_t a_s^{-1} a_s {}^s a_t a_{st}^{-1} b_{st}^{-1} = b_s {}^{s*a} b_t b_{st}^{-1} \in B. \end{aligned}$$

Ceci montre que $t_a(b) \in Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$. L'inverse de cette application est évidente, c'est $a' = (a'_s) \in Z^1(\mathfrak{g}, A, B) \mapsto (a'_s a_s^{-1})$.

Montrons maintenant que l'application passe au quotient. Soit b' un cocycle cohomologue à b . On a donc

$$b'_s \in B n^{-1} b_s {}^{s*a} n,$$

d'où

$$t_a(b')_s = b'_s a_s \in B n^{-1} b_s {}^{s*a} n a_s = B n^{-1} b_s a_s {}^s n = B n^{-1} t_a(b)_s {}^s n.$$

Donc $t_a(b')$ est cohomologue à $t_a(b)$, ce qui conclut la preuve. \square

2.4 Suites exactes I

Tout comme dans la cohomologie abélienne, on peut dans ce cadre construire des suites exactes longues avec les H^i . Elles ne seront pas infinies, mais dans les sections qui suivent on donnera ce qu'il faut pour arriver jusqu'à H^2 .

Soit donc B un sous-groupe de A . On demande que B soit \mathfrak{g} -invariant, de façon que l'inclusion $\iota : B \rightarrow A$ soit un \mathfrak{g} -homomorphisme. Dans ce cas, l'ensemble quotient (A/B) est un \mathfrak{g} -ensemble, donc $H^0(\mathfrak{g}, A/B) = (A/B)^\mathfrak{g}$ est défini. C'est un ensemble pointé, avec $1 \cdot B$ comme élément distingué.

De plus, pour $x \in (A/B)^\mathfrak{g}$ on note que son image réciproque dans A est clairement un espace homogène principal à droite sur B . On note $\delta^0(x)$ sa classe dans $H^1(\mathfrak{g}, B)$. On a ainsi définie une application $\delta^0 : H^0(\mathfrak{g}, A/B) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, B)$ qui peut aussi s'exprimer au moyen des cocycles : Pour un cocycle représentant le même x , on prend une préimage $a \in A$ et on pose $b_s = a^{-1} {}^s a$. La \mathfrak{g} -invariance de $(A/B)^\mathfrak{g}$ nous dit que $b_s \in B$ pour tout $s \in \mathfrak{g}$ et en fait, b est un cocycle, car

$$b_{st} = a^{-1} {}^{st} a = a^{-1} {}^s a {}^s a^{-1} {}^s ({}^t a) = b_s {}^s (a^{-1} {}^t a) = b_s {}^s b_t.$$

On pose alors $\delta^0(x) = \text{Cl}(x)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que ces deux définitions de δ^0 sont équivalentes (en utilisant l'équivalence donnée dans la Section 2.2). Cette équivalence nous montre en particulier que $\delta^0(x)$ est indépendant du choix de sa préimage a .

Proposition 2.4.1. *On a une suite exacte d'ensembles pointés*

$$1 \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\iota^0} H^0(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p^0} H^0(\mathfrak{g}, A/B) \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\iota_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A).$$

Démonstration. Exactitude en $H^0(\mathfrak{g}, B)$: C'est évident, car $\iota : B \rightarrow A$ est une injection et ici on regarde sa restriction à $B^\mathfrak{g}$.

Exactitude en $H^0(\mathfrak{g}, A)$: C'est clair que $p^0(a) = p(a) = 1 \cdot B$ si et seulement si $a \in B$, d'où l'exactitude.

Exactitude en $H^0(\mathfrak{g}, A/B)$: Du point de vue des cocycles, si $x \in \text{Im}(p^0)$, alors x a une préimage $a \in A^{\mathfrak{g}}$, ce qui donne $\delta^0(x) = \text{Cl}(b)$ avec $b_s = a^{-1}s a = 1$. En sens inverse, si $\delta^0(x) = 1$, le cocycle $(a^{-1}s a)$ est cohomologue à 1, i.e. il existe $b \in B$ tel que $b^{-1}a^{-1}s a^s b = 1$, d'où $ab \in A^{\mathfrak{g}}$ et $p^0(ab) = p(a) = x$, donc $x \in \text{Im}(p^0)$.

Exactitude en $H^1(\mathfrak{g}, B)$: De la définition de δ^0 on voit qu'un élément est dans son image si et seulement si il est cohomologue à 1 dans A . \square

Soit maintenant B un sous-groupe quelconque de A . Certains éléments de $Z^1(\mathfrak{g}, A)$ peuvent être regardés comme dans $Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$. En effet, pour $a \in Z^1(\mathfrak{g}, A)$, on a clairement $a_s^s a_t a_{st}^{-1} = 1 \in B$ et alors il suffit de demander que a vérifie

$$a_s^{-1} B a_s = {}^s B,$$

pour tout $s \in \mathfrak{g}$. Ceci nous donne une fonction (pas forcément partout définie) que l'on note $Z^1(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p_*^1} Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$. On fait passer cette relation au quotient tout simplement en reliant deux classes si et seulement si il existe un cocycle a dans A qui appartient aux deux classes. On écrit $H^1(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ pour cette nouvelle relation (celle-ci pouvant être multivaluée). Notons que lorsque B est un sous-groupe \mathfrak{g} -invariant, $H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ a la classe du cocycle 1 comme élément distingué. En sens inverse, on note aussi que lorsque $1 \in Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$, le groupe B est \mathfrak{g} -invariant d'après les équations 2.2.1.

Proposition 2.4.2. *Supposons que B est \mathfrak{g} -invariant. Alors on a une suite exacte d'ensembles pointés*

$$1 \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\iota^0} H^0(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p^0} H^0(\mathfrak{g}, A/B) \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\iota_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A, B).$$

Par exactitude en $H^1(\mathfrak{g}, A)$, on veut dire que l'ensemble des éléments de $H^1(\mathfrak{g}, A)$ qui sont reliés à 1 par p_*^1 est l'image de ι_*^1 .

Démonstration. D'après la Proposition 2.4.1, il suffit de démontrer l'exactitude en $H^1(\mathfrak{g}, A)$. Soit a un cocycle vérifiant $a_s^{-1} B a_s = {}^s B$ (i.e. qui a une image dans $Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$). Il est cohomologue à 1 dans $Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$ si et seulement si $1 \in B n^{-1} a_s^s n$ pour certain $n \in N$, c'est à dire, si et seulement si $n^{-1} a_s^s n \in B$. Alors a est cohomologue à 1 dans $Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$ si et seulement si a est cohomologue dans $Z^1(\mathfrak{g}, A)$ à un cocycle à valeurs dans B , ce qui donne l'exactitude. \square

Supposons que l'on veuille décrire les fibres de ces applications. Si l'on prend un élément dans le noyau c'est facile. La fibre est exactement le noyau et la suite exacte nous donne de l'information sur les noyaux. Or, pour les autres fibres on ne sait rien a priori. C'est là où la torsion devient utile. Elle nous permet de regarder toute fibre comme le noyau d'une application. On se place d'abord dans un cadre un peu plus général.

Soit $u : B \rightarrow A$ un morphisme de \mathfrak{g} -groupes. Ce morphisme induit (par composition à gauche) une application

$$u_* : H^1(\mathfrak{g}, B) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, A).$$

Nous voulons décrire la fibre $u_*^{-1}(u_*(\beta))$ pour $\beta \in H^1(\mathfrak{g}, A)$. Soit b un cocycle représentant β et soit a son image par u_* . Comme u fait agir B sur A (par exemple, par translation à gauche), la Proposition 2.3.3 nous montre qu'on a un \mathfrak{g} -homomorphisme $u' : {}_b B \rightarrow {}_a A$ qui, de la même façon, induit un morphisme

$$u'_* : H^1(\mathfrak{g}, {}_b B) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, {}_a A).$$

On voit alors facilement que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathfrak{g}, B) & \xrightarrow{u_*} & H^1(\mathfrak{g}, A) \\ \tau_b \uparrow & & \tau_a \uparrow \\ H^1(\mathfrak{g}, {}_b B) & \xrightarrow{u'_*} & H^1(\mathfrak{g}, {}_a A) \end{array}$$

Comme τ_a envoie l'élément neutre de $H^1(\mathfrak{g}, {}_a A)$ en $u_*(\beta)$, τ_b nous donne une équivalence entre la fibre $u_*^{-1}(u_*(\beta))$ et le noyau de u'_* .

Retournons à notre cas spécifique avec B sous-groupe de A et regardons la relation p_*^1 . Dans ce cas, lorsqu'on tord par un cocycle a dans A , on trouve une deuxième relation p_*^1 entre $Z^1(\mathfrak{g}, {}_a A)$ et $Z^1(\mathfrak{g}, {}_a A, B)$. Ces relations au niveau ensembliste se réduisent à la diagonale de l'intersection des ensembles. On en déduit, en passant au quotient, qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathfrak{g}, A) & \xrightarrow{p_*^1} & H^1(\mathfrak{g}, A, B) \\ \tau_a \uparrow & & \tau_a \uparrow \\ H^1(\mathfrak{g}, {}_a A) & \xrightarrow{p_*^1} & H^1(\mathfrak{g}, {}_a A, B), \end{array} \quad (2.4.1)$$

i.e. pour tout $\gamma \in H^1(\mathfrak{g}, {}_a A)$ relié par p_*^1 avec $\eta \in H^1(\mathfrak{g}, {}_a A, B)$, on a que $\tau_a(\gamma)$ est relié par p_*^1 avec $\tau_a(\eta)$.

Maintenant on peut donner quelques corollaires de la dernière proposition.

Corollaire 2.4.2.1. *Le noyau $\text{Ker}(\iota_*^1)$ s'identifie avec le quotient de $(A/B)^\mathfrak{g}$ par l'action du groupe $A^\mathfrak{g}$.*

Démonstration. En utilisant la suite exacte, on voit qu'il suffit de montrer que $\delta^0(x) = \delta^0(x')$ si et seulement si il existe $c \in A^\mathfrak{g}$ tel que $cx' = x$. Or, ceci est clair : si $a, a' \in A$ sont des préimages de x, x' , on a

$$\begin{aligned} \delta^0(x) = \delta^0(x') &\Leftrightarrow b^{-1}a^{-1}s a^s b = a'^{-1}s a' \text{ pour certain } b \in B \text{ et tout } s \in \mathfrak{g} \\ &\Leftrightarrow aba'^{-1} \in A^\mathfrak{g} \text{ pour certain } b \in B. \end{aligned}$$

En posant $c = aba'^{-1}$, on trouve l'équivalence voulue. \square

Corollaire 2.4.2.2. *Soit $\beta \in H^1(\mathfrak{g}, B)$ et b un cocycle dans cette classe. Alors $(\iota_*^1)^{-1}(\iota_*^1(\beta))$ s'identifie avec le quotient de $({}_b A / {}_b B)^\mathfrak{g}$ par l'action de $({}_b A)^\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Ceci est clair en tordant la suite exacte comme on a expliqué avant. \square

Corollaire 2.4.2.3. *Soit $\alpha \in H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ tel que $(p_*^1)^{-1}(\alpha) \neq \emptyset$, i.e. il existe un cocycle $a \in Z^1(\mathfrak{g}, A)$ représentant α . L'image inverse de α par p_*^1 s'identifie alors avec $\text{Im}(H^1(\mathfrak{g}, {}_a B) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, {}_a A))$.*

Démonstration. Ceci est clair d'après l'exactitude de la suite et le diagramme (2.4.1). On note que ${}_a B$ est bien définie, car a , étant un cocycle dans $Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$, il est à valeurs dans N . D'après l'Exemple 2.3.2, on a bien le droit de tordre B par a . \square

Lorsque B est un sous-groupe distingué de A , l'ensemble A/B a une structure de groupe et en plus on peut appliquer la Proposition 2.2.3. On trouve alors le résultat suivant.

Corollaire 2.4.2.4. *La suite d'ensembles pointés*

$$1 \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\iota^0} H^0(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p^0} H^0(\mathfrak{g}, A/B) \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\iota_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A/B),$$

est exacte.

Démonstration. Il suffit de noter que la relation p_*^1 définie plus en haut devient l'application évidente après identification de $H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ avec $H^1(\mathfrak{g}, A/B)$. \square

L'ensemble $H^0(\mathfrak{g}, A/B)$ a maintenant une structure de groupe, ce qui rend plus facile la description des fibres. En effet, $(A/B)^\mathfrak{g}$ agit maintenant sur $H^1(\mathfrak{g}, B)$ de la façon suivante : Pour $c \in (A/B)^\mathfrak{g}$, on prend une préimage $a \in A$. Soit $\beta \in H^1(\mathfrak{g}, B)$ et b un cocycle dans cette classe. On pose alors $b'_s = a^{-1}b_s a$ et on définit $\beta \cdot c = \text{Cl}(b')$. On vérifie facilement que cette action est bien définie.

Proposition 2.4.3. *Cette action a les propriétés suivantes :*

- (i) Pour $c \in \mathfrak{g}$, on a $\delta^0(c) = 1 \cdot c$.
- (ii) Deux éléments $\beta, \beta' \in H^1(\mathfrak{g}, B)$ ont même image par ι_*^1 si et seulement si il existe $c \in (A/B)^\mathfrak{g}$ tel que $\beta \cdot c = \beta'$.
- (iii) Pour $\beta = \text{Cl}(b) \in H^1(\mathfrak{g}, B)$ et $c \in (A/B)^\mathfrak{g}$, on a $\beta \cdot c = \beta$ si et seulement si $c \in \text{Im}(\text{Cl}_b : (A/B)^\mathfrak{g} \rightarrow (A/B)^\mathfrak{g})$.

Démonstration. Pour (i), c'est clair d'après les définitions de δ^0 et de l'action.

Pour (ii), soient b, b' des cocycles représentant β et β' respectivement. On a alors $\iota_*^1(\beta) = \iota_*^1(\beta')$ si et seulement si $b_s = a^{-1}b'_s a$ pour certain $a \in A$. Or, comme B est normal dans A , on a $b_s = b'_s a^{-1} a$ pour certain $b'_s \in B$. On trouve que $a^{-1} a \in B$, ce qui nous dit que a est la préimage d'un $c \in (A/B)^\mathfrak{g}$, et alors $\beta = \beta' \cdot c$.

Pour (iii), supposons d'abord $\beta = 1$. Le résultat est alors évident d'après (i) et l'exactitude de la suite. Le résultat général est alors clair en tordant la suite par b . Il faut juste noter que comme b est à valeurs dans B , on a ${}_b(A/B) = (A/B)$. \square

Corollaire 2.4.3.1. *Le noyau $\text{Ker}(H^1(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A/B))$ s'identifie au quotient de $H^1(\mathfrak{g}, B)$ par l'action de $(A/B)^\mathfrak{g}$.*

Démonstration. C'est clair d'après l'exactitude de la suite et la partie (ii) de la Proposition 2.4.3. \square

Corollaire 2.4.3.2. *Soit $\alpha = \text{Cl}(a) \in H^1(\mathfrak{g}, A)$. Alors la fibre $p_*^{1-1}(p_*^1(\alpha))$ de α s'identifie au quotient de $H^1(\mathfrak{g}, {}_a B)$ par l'action de ${}_a(A/B)^\mathfrak{g}$.*

Démonstration. C'est clair d'après le dernier corollaire en tordant la suite. \square

Remarque.

On pourrait écrire encore pas mal de suites exactes et des descriptions de ses fibres dans de cas plus généraux ou plus spécifiques. On a aussi des résultats plus généraux sur les relations entre cohomologies relatives, où l'on utilise toujours la torsion pour analyser ses fibres. Pour trouver tous ces résultats, on pourra regarder [Se1, Chapitre 1, §5] et [Sp1, 1.7 - 1.11].

2.5 \mathfrak{g} -liens

Soit A un groupe. On ne demande pas maintenant qu'il soit un \mathfrak{g} -groupe. On note $\text{Aut}(A)$ (resp. $\text{Int}(A)$) le groupe des automorphismes de A (resp. des automorphismes intérieures). On sait que $\text{Int}(A)$ est distingué dans $\text{Aut}(A)$. On appelle $\text{Out}(A)$ le quotient de ces groupes et on note $\pi : \text{Aut}(A) \rightarrow \text{Out}(A)$ la projection canonique. On munit $\text{Aut}(A)$ (et par restriction $\text{Int}(A)$) de la topologie faible par rapport aux applications d'évaluation $\varphi \mapsto \varphi(a)$ pour $a \in A$ (le groupe A étant muni de la topologie discrète). Le groupe $\text{Out}(A)$ hérite donc d'une topologie quotient naturelle.

Définition 2.5.1. Un \mathfrak{g} -lien sur A est un homomorphisme $\kappa : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Out}(A)$ tel qu'il existe une application continue $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Aut}(A)$ relevant κ , i.e. tel que $\kappa = \pi \circ \phi$. S'il existe un tel ϕ qui soit un homomorphisme (ou en d'autres termes, si A est un \mathfrak{g} -groupe via ϕ), le \mathfrak{g} -lien κ est dit trivial.

Exemples 2.5.2.

- (1) Si $\kappa = 1$, on a un \mathfrak{g} -lien trivial. En effet, on peut relever κ en $\phi = 1$.
- (2) Si A est abélien, alors $\text{Aut}(A) = \text{Out}(A)$. Alors tout \mathfrak{g} -lien sur A est trivial.

Soit $\lambda : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$ un homomorphisme continu et soit κ (resp. κ') un \mathfrak{g} -lien (resp. \mathfrak{g}' -lien) sur A (resp. sur A'). Un homomorphisme $\mu : A \rightarrow A'$ est un morphisme de κ dans κ' compatible avec λ s'il existe des applications α, α' relevant κ et κ' et vérifiant, pour $a \in A$ et $s' \in \mathfrak{g}'$,

$$\mu(\alpha_{\lambda(s')}(a)) = \alpha'_{s'}(\mu(a)).$$

Dans le cas où $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, $A' = A$ et $\mu \in \text{Aut}(A)$, ceci équivaut à $\pi(\mu)\kappa(s) = \kappa'(s)\pi(\mu)$ pour tout $s \in \mathfrak{g}$.

Lorsqu'on a introduit l'ensemble de 1-cohomologie, on a donné d'abord une définition avec des cocycles et relations et on a donné une équivalence entre cette définition et sa caractérisation avec les espaces homogènes. Cette fois on fera le contraire. On définira $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ à travers de sa caractérisation. On parlera alors sur les extensions de groupes.

Soit A un groupe discret. Une extension E de \mathfrak{g} par A est une suite exacte de groupes topologiques

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \rightarrow 1,$$

i.e. ι est un morphisme strict (ce qui revient à dire que $\iota(A)$ est homéomorphe à A , donc discret) et p est une application ouverte. Un morphisme d'extensions de \mathfrak{g} par A est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & E & \xrightarrow{p} & \mathfrak{g} \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \nu & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota'} & E' & \xrightarrow{p'} & \mathfrak{g} \longrightarrow 1. \end{array}$$

On remarque que tout morphisme est un isomorphisme. Une extension est dite scindée s'il existe un homomorphisme continu $q : \mathfrak{g} \rightarrow E$ tel que $q \circ p = \text{id}_{\mathfrak{g}}$.

Remarque.

Lorsque \mathfrak{g} est profini (ce qui est toujours notre cas), il existe toujours une section continue $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow E$. On remarque qu'une section n'est pas forcément un morphisme de groupes.

A toute extension E de \mathfrak{g} par A on peut lui associer un \mathfrak{g} -lien sur A de la façon suivante : On choisit une section continue $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow E$ et on pose $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Aut}(A)$, $s \mapsto \text{int}(\sigma(s))$, ce

qui est bien défini car A est distingué dans E . On définit alors $\kappa = \pi \circ \phi$. Cette définition est indépendante du choix de la section σ . En effet, si $\hat{\sigma}$ est un autre choix, on trouve $\hat{\sigma}(s) = a_s \sigma(s)$, ce qui donne l'application $\hat{\phi}$ et le morphisme $\hat{\kappa}$ vérifiant

$$\hat{\phi}(s) = \text{int}(a_s \sigma(s)) = \text{int}(a_s) \circ \text{int}(\sigma(s)),$$

et donc $\hat{\phi} \equiv \phi \pmod{\text{Int}(A)}$, ou bien $\hat{\kappa} = \kappa$. On dit que κ est le \mathfrak{g} -lien associé à E .

Remarque.

Un \mathfrak{g} -lien κ quelconque n'est pas forcément associé à une extension. Un κ vérifiant ceci est dit représentable. Il y a un critère de représentabilité qui utilise $H^3(\mathfrak{g}, C)$ où C est le centre de A (c.f. [ML, Chapter IV, 8]).

2.6 2-cohomologie non abélienne

On fixe A un groupe discret et κ un \mathfrak{g} -lien sur A .

Définition 2.6.1. L'ensemble des classes d'isomorphisme des extensions de \mathfrak{g} par A ayant κ comme \mathfrak{g} -lien associé est noté $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ et on l'appelle l'ensemble de 2-cohomologie de κ .

Remarques.

L'ensemble $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ peut être vide. Plus précisément, il l'est exactement lorsque κ n'est pas représentable.

Lorsque A est un \mathfrak{g} -groupe, on a un morphisme $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Aut}(A)$ qui induit le \mathfrak{g} -lien trivial $\kappa = \pi \circ \phi$. Dans ce cas l'ensemble $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ devient un ensemble pointé avec le produit semidirect induit par ϕ comme élément distingué. Cette extension correspond à l'élément $\text{Cl}(\phi, 1) \in H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ dans la définition qui suit.

Lorsque A est abélien, on a une bijection canonique entre $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ et $H^2(\mathfrak{g}, A)$, où l'action de \mathfrak{g} sur A est donnée par κ (qui est maintenant trivial, c.f. l'Exemple 2.5.2 (2)).

On redéfinit maintenant l'ensemble $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ au moyen des cocycles.

Définition 2.6.2. Un 2-cocycle est une paire (f, g) où $f : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Aut}(A)$ et $g : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow A$ sont des applications continues tels que, pour $s, t, u \in \mathfrak{g}$,

$$f_s \pmod{\text{Int}(A)} = \kappa(s), \tag{2.6.1}$$

$$f_{st} = \text{int}(g_{s,t}) \circ f_s \circ f_t, \tag{2.6.2}$$

$$g_{s,tu} f_s(g_{t,u}) = g_{st,u} g_{s,t}. \tag{2.6.3}$$

L'ensemble des 2-cocycles est noté $Z^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$. Un cocycle de la forme $(f, 1)$ est appelé un cocycle neutre.

Remarque.

Cette définition diffère un peu de celle donnée par Springer dans [Sp1]. Ses 2-cocycles utilisent g^{-1} au lieu de notre g . Les égalités qu'on vient de définir se voient un peu altérées et donc les démonstrations dans la suite ne sont pas exactement celles trouvées dans [loc. cit.], mais l'idée reste toujours la même.

Le groupe $C^1(\mathfrak{g}, A)$ des applications continues $c : \mathfrak{g} \rightarrow A$ agit sur $Z^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ par la formule $c \cdot (f, g) = (c \cdot f, c \cdot g)$ où

$$\begin{aligned} (c \cdot f)_s &= \text{int}(c_s) \circ f_s, \\ (c \cdot g)_{s,t} &= c_{st} g_{s,t} f_s(c_t)^{-1} c_s^{-1}. \end{aligned}$$

On vérifie par un calcul direct que cette action est bien définie.

Proposition 2.6.3. *On a une bijection canonique $\lambda : H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa) \rightarrow Z^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)/C^1(\mathfrak{g}, A)$.*

Démonstration. On définit λ comme suit :

Soit E une extension dans $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$. Choisissons une section $\hat{\sigma} : s \mapsto \hat{s}$. On pose, comme dans la dernière section, $f : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Aut}(A)$, $s \mapsto \text{int}(\hat{s})$. Comme $E \in H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$, on voit que $f_s \equiv \kappa \pmod{\text{Int}(A)}$. D'autre part, pour $\gamma \in E$ on a une écriture unique $\gamma = a\hat{s}$ avec $a \in A$, $s \in \mathfrak{g}$. Notons aussi que l'on a $\hat{s}a = \hat{s}a\hat{s}^{-1}\hat{s} = f_s(a)\hat{s}$.

On veut définir un cocycle. Pour cela, notons que $\hat{s}\hat{t}$ et \hat{st} ont la même image dans \mathfrak{g} . Alors il existe un unique $g_{s,t} \in A$ tel que $\hat{st} = g_{s,t}\hat{s}\hat{t}$. On affirme que (f, g) est un cocycle. On a déjà vu qu'il vérifié l'équation (2.6.1). Pour (2.6.2), on note que

$$f_{st} = \text{int}(\hat{st}) = \text{int}(g_{s,t}\hat{s}\hat{t}) = \text{int}(g_{s,t}) \circ \text{int}(\hat{s}) \circ \text{int}(\hat{t}) = \text{int}(g_{s,t}) \circ f_s \circ f_t.$$

Et pour (2.6.3), on utilise les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \widehat{stu} &= g_{st,u}\widehat{st}\hat{u} = g_{st,u}g_{s,t}\hat{s}\hat{t}\hat{u}, \\ \widehat{stu} &= g_{s,tu}\widehat{s}\hat{t}\hat{u} = g_{s,tu}\hat{s}g_{t,u}\hat{t}\hat{u} = g_{s,tu}f_s(g_{t,u})\hat{s}\hat{t}\hat{u}, \end{aligned}$$

d'où $g_{s,tu}f_s(g_{t,u}) = g_{st,u}g_{s,t}$. Donc $(f, g) \in Z^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ et on pose $\lambda(E) = \text{Cl}(f, g)$.

Vérifions que λ est bien définie. Soit $\tilde{\sigma} : s \mapsto \tilde{s}$ une autre section. On a alors $\tilde{s} = c_s\hat{s}$ pour certain $c \in C^1(\mathfrak{g}, A)$. On trouve alors des applications $\tilde{f} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Aut}(A)$, $s \mapsto \text{int}(\tilde{s})$ et \tilde{g} vérifiant $\tilde{st} = \tilde{g}_{s,t}\tilde{s}\tilde{t}$. On vérifie que

$$\tilde{f}_s = \text{int}(\tilde{s}) = \text{int}(c_s\hat{s}) = \text{int}(c_s) \circ \text{int}(\hat{s}) = \text{int}(c_s) \circ f_s = c \cdot f.$$

Et pour \tilde{g} on a

$$\tilde{st} = \tilde{g}_{s,t}\tilde{s}\tilde{t} = \tilde{g}_{s,t}c_s\hat{s}c_t\hat{t} = \tilde{g}_{s,t}c_s f_s(c_t)\hat{s}\hat{t} = \tilde{g}_{s,t}c_s f_s(c_t)g_{s,t}^{-1}\hat{s}\hat{t} = \tilde{g}_{s,t}c_s f_s(c_t)g_{s,t}^{-1}c_s^{-1}\hat{s}\hat{t},$$

ce qui nous donne l'égalité

$$\tilde{g}_{s,t} = c_{st}g_{s,t}f_s(c_t)^{-1}c_s^{-1}.$$

Donc on a bien $(\tilde{f}, \tilde{g}) = c \cdot (f, g)$, ou bien $\text{Cl}(\tilde{f}, \tilde{g}) = \text{Cl}(f, g)$.

D'autre part, si E' est une autre extension de \mathfrak{g} par A isomorphe à E , on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & E & \xrightarrow{p} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \nu & & \parallel & & \\ 1 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\iota'} & E' & \xrightarrow{p'} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

alors $\hat{\sigma}' : s \mapsto \nu(\hat{s})$ est une section de \mathfrak{g} dans E' . On note alors que le cocycle (f', g') induit par cette section est le même. En fait, comme $\nu|_A = \text{id}_A$,

$$\begin{aligned} f'_s(a) &= \nu(\hat{s})a\nu(\hat{s})^{-1} = \nu(\hat{s}a\hat{s}^{-1}) = \hat{s}a\hat{s}^{-1} = f_s(a), \\ \nu(\hat{st}) &= g'_{s,t}\nu(\hat{s})\nu(\hat{t}) = \nu(g'_{s,t}\hat{s}\hat{t}), \end{aligned}$$

d'où on en tire $f' = f$ et $g' = g$. Donc λ est bien définie.

Injectivité : Supposons $\lambda(E) = \lambda(E')$. En prenant des sections $\hat{\sigma} : \mathfrak{g} \rightarrow E$, $s \mapsto \hat{s}$, $\hat{\sigma}' : \mathfrak{g} \rightarrow E'$, $s \mapsto \hat{s}'$, on trouve des cocycles (f, g) et (f', g') tels que $(f', g') = c \cdot (f, g)$ pour un certain $c \in C^1(\mathfrak{g}, A)$. Alors, quitte à changer $\hat{\sigma}'$ par $c^{-1}\hat{\sigma}' : s \mapsto c_s^{-1}\hat{s}'$, on peut

supposer que ces deux sections induisent le même cocycle (f, g) . On définit une application $\nu : E \rightarrow E'$ par $\nu(a\hat{s}) = a\hat{s}'$. C'est clairement une application bijective qui induit l'identité sur A et \mathfrak{g} . Il suffit de montrer que c'est un morphisme de groupes, ce qui est clair d'après

$$\nu(a\hat{s}b\hat{t}) = \nu(af_s(b)\hat{s}t) = \nu(af_s(b)g_{s,t}^{-1}\hat{st}) = af_s(b)g_{s,t}^{-1}\hat{st}' = af_s(b)\hat{s}'t' = a\hat{s}'b\hat{t}'.$$

On a donc $E \cong E'$ et λ est injective.

Surjectivité : Soit (f, g) un 2-cocycle. On peut supposer qu'il est tel que $f_1 = \text{id}_A$ et $g_{1,1} = g_{s,1} = g_{1,s} = 1$. En effet, de la définition des cocycles (Définition 2.6.2) on obtient facilement les égalités

$$f_1 = \text{int}(g_{1,1}^{-1}), \quad g_{s,1} = f_s(g_{1,1}), \quad f_1(g_{1,s}) = g_{1,1},$$

d'où on obtient aussi $g_{1,s} = g_{1,1}$. Alors en posant $c_s = g_{1,1}$ pour tout $s \in \mathfrak{g}$ et $(f', g') = c \cdot (f, g)$, on trouve que (f', g') vérifie ces propriétés.

Il s'agit alors de construire une extension de \mathfrak{g} par A qui induise (f, g) et telle que son \mathfrak{g} -lien associé soit κ . On pose $E = A \times \mathfrak{g}$ avec le produit

$$(a, s)(b, t) = (af_s(b)g_{s,t}^{-1}, st).$$

On vérifie l'associativité :

$$\begin{aligned} [(a, s)(b, t)](c, u) &= (af_s(b)g_{s,t}^{-1}, st)(c, u) = (af_s(b)g_{s,t}^{-1}f_{st}(c)g_{st,u}^{-1}, stcu) \\ &= (af_s(b)g_{s,t}^{-1}g_{s,t}f_s(f_t(c))g_{s,t}^{-1}g_{st}^{-1}, stcu) = (af_s(b)f_s(f_t(c))f_s(g_{t,u})^{-1}g_{st,u}^{-1}, stcu) \\ &= (af_s(bf_t(c)g_{t,u}^{-1})g_{st,u}^{-1}, stcu) = (a, s)(bf_t(c)g_{t,u}^{-1}, tu) = (a, s)[(b, t)(c, u)]. \end{aligned}$$

L'élément neutre est $(1, 1)$. En fait,

$$\begin{aligned} (1, 1)(a, s) &= (f_1(a)g_{1,s}^{-1}, s) = (a, s), \\ (a, s)(1, 1) &= (af_s(1)g_{s,1}^{-1}, s) = (a, s). \end{aligned}$$

L'inverse de (a, s) est donné par $(f_s^{-1}(a^{-1}g_{s,s^{-1}}), s^{-1})$. En fait, on a

$$(a, s)(f_s^{-1}(a^{-1}g_{s,s^{-1}}), s^{-1}) = (aa^{-1}g_{s,s^{-1}}g_{s,s^{-1}}^{-1}, ss^{-1}) = (1, 1).$$

Finalement, on note que A s'injecte dans E par $a \mapsto (a, 1)$, car $(a, 1)(b, 1) = (ab, 1)$. Il est distingué dans E car $(b, s)(a, 1)(b, s)^{-1} = (b, s)(a, 1)(*, s^{-1}) = (*, ss^{-1}) = (*, 1) \in A$. Et pour montrer que E induit κ , il suffit de montrer qu'elle induit le cocycle (f, g) , car $\kappa = f \text{ mod Int}(A)$. Or, on a clairement la section $\hat{\sigma} : s \mapsto \hat{s} = (1, s)$, qui induit bien (f, g) d'après les égalités

$$\begin{aligned} \hat{s}a\hat{s}^{-1} &= (1, s)(a, 1)(1, s)^{-1} = (f_s(a)g_{s,1}^{-1}, s)(f_s^{-1}(g_{s,s^{-1}}), s^{-1}) \\ &= (f_s(a)g_{s,s^{-1}}g_{s,s^{-1}}^{-1}, ss^{-1}) = (f_s(a), 1) = f_s(a), \\ \hat{st} &= (1, s)(1, t) = (f_s(1)g_{s,t}^{-1}, st) = (g_{s,t}^{-1}f_1(1)g_{1,st}, st) = (g_{s,t}^{-1}, 1)(1, st) = g_{s,t}^{-1}\hat{st}. \end{aligned}$$

Donc on trouve $\lambda(E) = \text{Cl}(f, g)$, ce qui conclut la preuve. \square

Remarque.

D'après la construction de cette équivalence, on voit que les classes dans $Z^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)/C^1(\mathfrak{g}, A)$ contenant un cocycle neutre correspondent aux extensions scindées. On note $N^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ l'ensemble de ces classes.

Maintenant on va voir que l'ensemble $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ n'est pas si mystérieux. Il se trouve qu'on peut le décrire via le centre de A , qui est un groupe beaucoup plus simple à analyser.

Soit donc C le centre de A . Il est invariant par automorphismes de A , donc on a un morphisme $\text{Aut}(A) \rightarrow \text{Aut}(C) = \text{Out}(C)$ qui est trivial sur les automorphismes intérieurs. On trouve par composition une application $\mathfrak{g} \rightarrow \text{Out}(C)$ que l'on note toujours κ . Comme C est abélien, on trouve que κ est un \mathfrak{g} -lien trivial sur C .

Soit (f, g) un 2-cocycle dans C . Alors comme $\text{Aut}(C) = \text{Out}(C)$, on trouve $f = \kappa$ et donc g est un 2-cocycle au sens classique. Ceci nous montre que $H^2(\mathfrak{g}, C, \kappa)$ s'identifie avec le groupe abélien $H^2(\mathfrak{g}, C)$ par $(f, g) \mapsto g$. Ce groupe agit sur $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ de la façon suivante : Pour $h \in Z^2(\mathfrak{g}, C)$, $(f, g) \in Z^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$, on pose

$$\text{Cl}(h) \cdot \text{Cl}(f, g) = \text{Cl}(f, hg).$$

Cette action est bien définie. En effet, la commutativité des h_s nous montre facilement que $h(c \cdot g) = c \cdot (hg)$ pour $c \in C^1(\mathfrak{g}, A)$, donc la définition ne dépend pas du cocycle (f, g) . De même, pour $c' \in C^1(\mathfrak{g}, C)$, la commutativité des c'_s nous montre que $c' \cdot f = f$ et $(c' \cdot h)g = c' \cdot (hg)$.

Proposition 2.6.4. *Si $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ est non vide, alors il est un espace homogène principal sur $H^2(\mathfrak{g}, C)$ pour cette action.*

Démonstration. Montrons d'abord la transitivité. Soient $\eta = \text{Cl}(f, g)$, $\eta' = \text{Cl}(f', g')$ deux éléments de $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ (que l'on suppose non vide). On peut supposer $f = f'$, car pour tout $s \in \mathfrak{g}$ on a $f_s \equiv f'_s \pmod{\text{Int}(A)}$, donc $c_s = f_s f'^{-1}_s \in \text{Int}(A) = A/C$. On étend ceci en une application continue $c : \mathfrak{g} \rightarrow A$ et on voit bien que $c \cdot f' = f$. Ceci étant, on définit $\varphi_{s,t} = g_{s,t} g'^{-1}_{s,t}$. Les égalités

$$\begin{aligned} f_{s,t} &= \text{int}(g_{s,t}) \circ f_s \circ f_t \\ f'_{s,t} &= \text{int}(g'_{s,t}) \circ f_s \circ f_t, \end{aligned}$$

nous disent que $\text{int}(\varphi_{s,t}) = \text{int}(g_{s,t}) \circ \text{int}(g'^{-1}_{s,t}) = \text{id}_A$ et alors $\varphi_{s,t} \in C$. On affirme que φ est un cocycle. En effet, on a

$$\varphi_{s,tu} {}^s\varphi_{t,u} = g_{s,tu} g'^{-1}_{s,tu} {}^s g_{t,u} {}^s g'^{-1}_{t,u}.$$

Comme φ est à valeurs dans C et C est \mathfrak{g} -invariant, on peut récrire ceci comme

$$\varphi_{s,tu} {}^s\varphi_{t,u} = g_{s,tu} {}^s g_{t,u} {}^s g'^{-1}_{t,u} g'^{-1}_{s,tu} = g_{st,u} g_{s,t} g'^{-1}_{s,t} g'^{-1}_{st,u} = g_{st,u} \varphi_{s,t} g'^{-1}_{st,u} = g_{s,tu} g'^{-1}_{s,tu} \varphi_{s,t} = \varphi_{st,u} \varphi_{s,t}.$$

On a donc $\text{Cl}(f, g') = \text{Cl}(\varphi) \cdot \text{Cl}(f, g)$, ce qui donne la transitivité.

Supposons maintenant que l'on ait $\text{Cl}(\varphi) \cdot \text{Cl}(f, g) = \text{Cl}(f, g)$. Alors il existe $c \in C^1(\mathfrak{g}, A)$ telle que

$$\begin{aligned} f_s &= \text{int}(c_s) \circ f_s, \\ \varphi_{s,t} g_{s,t} &= c_{st} g_{s,t} f_s(c_t)^{-1} c_s^{-1}. \end{aligned}$$

On en tire que $c_s \in C$ et alors la deuxième équation dévient

$$\varphi_{s,t} = c_{st} f_s(c_t)^{-1} c_s^{-1},$$

ce qui nous dit que φ est cohomologue à 1 et conclut la preuve. \square

Pour $\eta, \eta' \in H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$, on note $\eta' - \eta$ le seul élément de $H^2(\mathfrak{g}, C)$ emportant η dans η' . Ceci est bien défini d'après la Proposition 2.6.4.

Remarque.

Lorsque A est un \mathfrak{g} -groupe, l'ensemble $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ devient un ensemble pointé avec l'élément $\text{Cl}(\phi, 1) \in H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ comme élément distingué (c.f. les remarques après la Définition 2.6.1). Cet élément nous donne avec la dernière proposition une bijection canonique entre $H^2(\mathfrak{g}, C)$ et $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$. L'application est définie par $\text{Cl}(h) \mapsto \text{Cl}(\phi, h)$, avec l'inverse $\eta \mapsto \eta - \text{Cl}(\phi, 1)$.

2.7 Morphismes

Passons maintenant aux morphismes des \mathfrak{g} -liens et ses conséquences sur les ensembles de 2-cohomologie. On suppose désormais que tous les \mathfrak{g} -liens sont représentables (sinon, il n'y a rien à définir). Soient κ un \mathfrak{g} -lien sur A , κ' un \mathfrak{g}' -lien sur A' , $\lambda : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}$ un homomorphisme et $\mu : A \rightarrow A'$ un morphisme de κ dans κ' compatible avec λ (c.f. Section 2.5). On définit une relation $(\lambda, \mu)_*^2 : H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}', A', \kappa')$ au moyen des cocycles : η est relié avec η' si et seulement si il existe des cocycles $(f, g), (f', g')$ représentant η et η' tels que, pour $a \in A$ et $s', t' \in \mathfrak{g}'$,

$$f'_{s'}(\mu(a)) = \mu(f_{\lambda(s')}(a)), \quad g'_{s', t'} = \mu(g_{\lambda(s'), \lambda(t')}). \quad (2.7.1)$$

Proposition 2.7.1. *Si A' est abélien ou μ est surjectif, $(\lambda, \mu)_*^2$ est une application.*

Démonstration. Montrons d'abord que tout élément a une image par $(\lambda, \mu)_*^2$.

Supposons que A' est abélien. Dans ce cas il n'y a qu'un choix pour f' (c'est κ'), et la compatibilité de μ avec λ nous dit que tout f est compatible avec $f' = \kappa'$. Il suffit alors, pour $(f, g) \in Z^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$, de poser $g'_{s', t'} = \mu(g_{\lambda(s'), \lambda(t')})$ et on a $(\lambda, \mu)_*^2(\text{Cl}(f, g)) = (\kappa', g')$. Donc tout élément de $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ a une image par $(\lambda, \mu)_*^2$.

D'autre part, si μ est surjectif, pour $(f, g) \in Z^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ on pose $g'_{s', t'} = \mu(g_{\lambda(s'), \lambda(t')})$ et pour $a' \in A'$, on prend une préimage $a \in A$ et on définit $f'_{s'}(a') = \mu(f_{\lambda(s')}(a))$. C'est clair que ces cocycles vérifient (2.7.1). On peut vérifier que f' ne dépend pas du choix des préimages. Il suffit de noter que $\text{Ker}(\mu)$ est invariant par f_s , pour tout $s \in \mathfrak{g}$, ce qui découle de la compatibilité de μ avec λ .

Supposons maintenant que l'on a, pour certain $c \in C^1(\mathfrak{g}, A)$, que les paires de cocycles $(f, g), (f', g')$ et $(c \cdot f, c \cdot g), (f'', g'')$ vérifient les équations. Il faut montrer que $\text{Cl}(f'', g'') = \text{Cl}(f', g')$. D'après (2.7.1) on a les équations

$$\begin{aligned} f'_{s'}(\mu(a)) &= \mu(f_{\lambda(s')}(a)), & g'_{s', t'} &= \mu(g_{\lambda(s'), \lambda(t')}), \\ f''_{s'}(\mu(a)) &= \mu(\text{int}(c_{\lambda(s')}) \circ f_{\lambda(s')}(a)), & g''_{s', t'} &= \mu(c_{\lambda(s't')} g_{\lambda(s'), \lambda(t')} f_{\lambda(s')}(c_{\lambda(t')})^{-1} c_{\lambda(s')}^{-1}). \end{aligned}$$

On en tire les égalités

$$f''_{s'}(\mu(a)) = \mu(c_{\lambda(s')} f_{\lambda(s')}(a) c_{\lambda(s')}^{-1}) = \mu(c_{\lambda(s')}) \mu(f_{\lambda(s')}(a)) \mu(c_{\lambda(s')})^{-1} = \text{int}(\mu(c_{\lambda(s')})) \circ f'_{s'}(\mu(a)),$$

et

$$g''_{s', t'} = \mu(c_{\lambda(s't')}) \mu(g_{\lambda(s'), \lambda(t')}) \mu(f_{\lambda(s')}(c_{\lambda(t')})) \mu(c_{\lambda(s')}) = \mu(c_{\lambda(s't')}) g'_{s', t'} f'_{s'}(\mu(c_{\lambda(t')}))^{-1} \mu(c_{\lambda(s')})^{-1}.$$

Posons $c'_{s'} = \mu(c_{\lambda(s')})$. On voit alors qu'on a $(f'', g'') = c' \cdot (f', g')$. En effet, pour les g c'est évident d'après les dernières égalités, et pour les f on note que pour A abélien on a $f'' = \text{int}(c') f' = f'$, et pour μ surjectif on a aussi $f'' = \text{int}(c') f'$ d'après les dernières égalités \square

Ceci s'applique notamment dans le cas des quotients par un sous-groupe caractéristique.

Corollaire 2.7.1.1. *Soit κ un \mathfrak{g} -lien sur A et B un sous-groupe caractéristique de A (i.e. invariant par automorphismes de A). Notons $p : A \rightarrow A/B$ la projection. Alors on a un \mathfrak{g} -lien κ' sur A/B et une application canonique $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, A/B, \kappa')$ qui envoie $N^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ dans $N^2(\mathfrak{g}, A/B, \kappa')$.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.7.1, il suffit de donner un \mathfrak{g} -lien sur A/B tel que p soit un morphisme de κ dans κ' compatible avec $\text{id}_{\mathfrak{g}}$. Or, comme B est caractéristique, on a un morphisme canonique $\text{Aut}(A) \rightarrow \text{Aut}(A/B)$, donc un morphisme $\text{Out}(A) \rightarrow \text{Out}(A/B)$. En composant κ avec ce morphisme, on trouve $\kappa' : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Out}(A/B)$. Ce morphisme définit clairement un \mathfrak{g} -lien sur A/B et on voit facilement que p est compatible avec $\text{id}_{\mathfrak{g}}$. La dernière affirmation est claire d'après les équations (2.7.1). \square

Regardons un autre cas particulier de cette relation. On pose $\lambda = \text{id}_{\mathfrak{g}}$ et $\mu \in \text{Aut}(A)$. Alors μ est un morphisme de κ dans κ' compatible avec $\text{id}_{\mathfrak{g}}$, où $\kappa'(s) = \pi(\mu)\kappa(s)\pi(\mu)^{-1}$. La surjectivité de μ nous dit que $\mu_*^2 = (\text{id}_{\mathfrak{g}}, \mu)_*^2$ est une application.

Proposition 2.7.2. *Si $\mu \in \text{Int}(A)$, alors $\kappa' = \kappa$ et μ_*^2 est l'identité de $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$.*

Démonstration. C'est clair que $\kappa' = \kappa$. On a $\lambda = \text{id}_{\mathfrak{g}}$ et $\mu(a) = bab^{-1}$ pour certain $b \in A$. Les formules (2.7.1) nous donnent alors $\mu_*^2(f, g) = (f', g')$ avec

$$\begin{aligned} f'_s(a) &= \mu(f_s(\mu^{-1}(a))) = bf_s(b)^{-1}f_s(a)f_s(b)b^{-1}, \\ g'_{s,t} &= \mu(g_{s,t}) = bg_{s,t}b^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $f' = \text{int}(c) \circ f = c \cdot f$ avec $c_s = bf_s(b)^{-1}$. D'autre part, en utilisant l'équation (2.6.2), on trouve

$$(c \cdot g)_{s,t} = c_{st}g_{s,t}f_s(c_t)^{-1}c_s^{-1} = bf_{st}(b)^{-1}g_{s,t}f_s(f_t(b))f_s(b)^{-1}f_s(b)b^{-1} = bg_{s,t}b^{-1} = g'_{s,t},$$

d'où $(f', g') = c \cdot (f, g)$, ou bien $\text{Cl}(f', g') = \text{Cl}(f, g)$. \square

On peut généraliser un peu ce résultat. On fixe $(f, g) \in Z^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$. Alors tout élément de $Z^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ est cohomologue à un cocycle de la forme (f, g') , car f est uniquement définie (par κ) modulo l'action de $C^1(\mathfrak{g}, A)$. On pose maintenant, pour $t \in \mathfrak{g}$

$$\lambda_t : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, s \mapsto t^{-1}st \quad \text{et} \quad \mu_t : A \rightarrow A, a \mapsto f_t(a).$$

On voit que μ_t est un homomorphisme de κ dans κ , compatible avec λ_t , car $f_t \circ f_{t^{-1}st} \equiv f_s \circ f_t \text{ mod Int}(A)$, ce qui nous donne, d'après la surjectivité de μ_t , une application $(\lambda_t, \mu_t)_*^2$ de $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ dans lui-même. En prenant $f' = \text{int}(c) \circ f$ au lieu de f avec $c \in C^1(\mathfrak{g}, A)$, on obtient l'application $(\lambda_t, \text{int}(c_t) \circ \mu_t)_*^2 = (\lambda_t, \mu_t)_*^2 \circ (\text{id}_{\mathfrak{g}}, \text{int}(c_t))_*^2$, qui est égal à $(\lambda_t, \mu_t)_*^2$ d'après la dernière proposition. Donc $(\lambda_t, \mu_t)_*^2$ ne dépend pas du choix de (f, g) et on a même mieux.

Proposition 2.7.3. *$(\lambda_t, \mu_t)_*^2$ est l'identité de $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ pour tout $t \in \mathfrak{g}$.*

Démonstration. De la définition de (λ_t, μ_t) , on peut en déduire qu'elle envoie $\text{Cl}(f, g')$ dans $\text{Cl}(f', g'')$, avec

$$\begin{aligned} f'_r &= f_t \circ f_{t^{-1}rt} \circ f_t^{-1}, \\ g''_{r,s} &= f_t(g'_{t^{-1}rt, t^{-1}st}). \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'égalité (2.6.2) pour (f, g') , on trouve

$$f'_r = f_t \circ f_{t^{-1}rt} \circ f_t^{-1} = \text{int}(g'_{t, t^{-1}rt}^{-1}) \circ f_{rt} \circ f_t^{-1} = \text{int}(g'_{t, t^{-1}rt}^{-1}) \circ \text{int}(g'_{r,t}) \circ f_r.$$

En posant $h_r = g'_{t,t^{-1}rt}{}^{-1}g'_{r,t}$, on va montrer alors que $(f', g'') = h \cdot (f, g')$. On vient de le vérifier pour f donc il suffit de le vérifier pour g' . On a

$$(h \cdot g')_{r,s} = h_{rs}g'_{r,s}f_r(h_s)^{-1}h_r^{-1} = g'_{t,t^{-1}rst}{}^{-1}g'_{r,s}f_r(g'_{s,t}g'_{t,t^{-1}st})g'_{r,t}{}^{-1}g'_{t,t^{-1}rt}.$$

En utilisant toujours les propriétés des cocycles (notamment l'équation (2.6.3)) on obtient les égalités

$$\begin{aligned} g'_{rs,t}g'_{r,s}f_r(g'_{s,t}{}^{-1}) &= g'_{r,st}, \\ g'_{r,st}f_r(g'_{t,t^{-1}st})g'_{r,t}{}^{-1} &= g'_{rt,t^{-1}st}, \\ g'_{t,t^{-1}rst}g'_{rt,t^{-1}st}g'_{t,t^{-1}rt} &= f_t(g'_{t^{-1}rt,t^{-1}st}), \end{aligned}$$

donc,

$$(h \cdot g')_{r,s} = g'_{t,t^{-1}rst}{}^{-1}g'_{r,s}f_r(g'_{t,t^{-1}st})g'_{r,t}{}^{-1}g'_{t,t^{-1}rt} = g'_{t,t^{-1}rst}{}^{-1}g'_{rt,t^{-1}st}g'_{t,t^{-1}rt} = f_t(g'_{t^{-1}rt,t^{-1}st}) = g''_{r,s}.$$

Donc $h \cdot (f, g') = (f', g'')$ et $\text{Cl}(f, g') = \text{Cl}(f', g'')$, ce qui termine la preuve. \square

Remarque.

Dans le cadre de la cohomologie galoisienne, cette dernière proposition est une espèce d'équivalent du résultat classique de cohomologie galoisienne abélienne qui dit que pour un corps k , les $H^i(k_s/k, \mathfrak{g})$ ne dépendent pas du choix de la clôture séparable k_s de k (c.f. [Se3, Chapter X, Proposition 5] pour le résultat classique et la Section 4.7 pour le résultat sur H^2 non abélien).

2.8 2-cohomologie relative

Soit A un \mathfrak{g} -groupe, B un sous-groupe de A et $a \in Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$. On définit les applications $f : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Aut}(B)$ et $g : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow B$ par

$$\begin{aligned} f_s(b) &= a_s {}^s b a_s^{-1}, \quad b \in B; \\ g_{s,t} &= a_{st} {}^s a_t^{-1} a_s^{-1}. \end{aligned}$$

On note que f_s est bien un automorphisme de B et g est bien à valeurs dans B d'après les équations (2.2.1) vérifiées par a . Notons $s_{\#} : b \mapsto {}^s b$. Alors on a

$$\begin{aligned} f_{st} &= \text{int}(a_{st}) \circ (st)_{\#} = \text{int}(g_{s,t}) \circ \text{int}(a_s) \circ \text{int}({}^s a_t) \circ s_{\#} \circ t_{\#} \\ &= \text{int}(g_{s,t}) \circ \text{int}(a_s) \circ s_{\#} \circ \text{int}(a_t) \circ t_{\#} = \text{int}(g_{s,t}) \circ f_s \circ f_t. \end{aligned}$$

On définit alors un \mathfrak{g} -lien sur B comme $\kappa_a(s) = f_s \pmod{\text{Int}(B)}$ et on voit alors que $(f, g) \in Z^2(\mathfrak{g}, B, \kappa_a)$, car

$$\begin{aligned} g_{s,tu} f_s(g_{t,u}) &= a_{stu} {}^s a_{tu}^{-1} a_s^{-1} a_s {}^s a_{tu} {}^{st} a_u^{-1} a_t^{-1} a_s^{-1} = a_{stu} {}^{st} a_u^{-1} a_t^{-1} a_s^{-1} \\ &= a_{stu} {}^{st} a_u^{-1} a_{st}^{-1} a_{st} {}^s a_t^{-1} a_s^{-1} = g_{st,u} g_{s,t}. \end{aligned}$$

Prenons maintenant le cocycle cohomologue $a'_s = (b_s a_s)$ avec $b_s \in B$. On obtient une paire (f', g') telle que $f'_s = \text{int}(b_s) \circ f_s$, ce qui nous dit que cette paire induit le même \mathfrak{g} -lien, i.e. $\kappa_{a'} = \kappa_a$. En plus, on trouve par un calcul direct que $g'_{s,t} = b_{st} g_{s,t} f_s(b_t)^{-1} b_s^{-1}$. On en déduit que $(f', g') = b \cdot (f, g)$, donc ils définissent la même classe dans $H^2(\mathfrak{g}, B, \kappa_a)$.

Prenons cette fois le cocycle cohomologue $a'_s = n^{-1} a_s {}^s n$ avec $n \in N$, le normalisateur de B . Notons τ_n l'automorphisme de B défini par $b \mapsto n^{-1} b n$. Alors on a cette fois $f'_s = \tau_n \circ f_s \circ \tau_n^{-1}$, et donc $\kappa_{a'}$ pourrait être différent. On trouve en plus,

$$g'_{s,t} = n^{-1} a_{st} {}^{st} n {}^s (n^{-1} a_t {}^t n)^{-1} (n^{-1} a_s {}^s n)^{-1} = n^{-1} a_{st} {}^s a_t^{-1} a_s^{-1} n = \tau_n(g_{s,t}).$$

En utilisant les notations de la section précédente (notamment les égalités (2.7.1)), on voit qu'on a $(f', g') = (\tau_n)_*^2(f, g)$.

Soit Φ l'ensemble des \mathfrak{g} -liens sur B de la forme κ_a pour $a \in Z^2(\mathfrak{g}, A, B)$. D'après ce qu'on a fait, on voit que N agit sur l'union disjointe $\coprod_{\kappa \in \Phi} H^2(\mathfrak{g}, B, \kappa)$ via les τ_n et que l'on a une application δ^1 de $H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ dans les orbites de cette action. Posons

$$H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A) = \left(\coprod_{\kappa \in \Phi} H^2(\mathfrak{g}, B, \kappa) \right) / N,$$

alors on a une application $\delta^1 : H^1(\mathfrak{g}, A, B) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A)$.

On définit $N^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A)$ comme l'ensemble des orbites telles que ses éléments correspondent à des extensions scindées, ce qui est équivalent à dire que ses éléments contiennent des cocycles de la forme $(f, 1)$ (c.f. la remarque après la Proposition 2.6.3). On appelle $N^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A)$ l'ensemble des éléments neutres. On remarque immédiatement qu'il peut être vide.

2.9 Suites Exactes II

On préserve les notations de la section précédente. Soit κ le \mathfrak{g} -lien trivial sur A induit par $\phi : s \mapsto s_\#$ (i.e. par l'action de \mathfrak{g}). On affirme que $\iota : B \rightarrow A$ est un morphisme de κ_a dans κ compatible avec $\text{id}_{\mathfrak{g}}$ pour tout $a \in Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$. En effet, on a $\text{int}(a_s) \circ s_\# \equiv \kappa(s) \text{ mod Int}(A)$, et on a clairement, pour $b \in B$,

$$\iota(a_s {}^s b a_s^{-1}) = \text{int}(a_s) \circ s_\#(\iota(b)).$$

Soient $(f, g) \in Z^2(\mathfrak{g}, B, \kappa_a)$ et $(f', g') \in Z^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ et supposons que l'on a $\iota_*^2(f, g) = (f', g')$. On voit que, pour $n \in N$, si l'on note $a'_s = n^{-1} a_s n$, la classe $n \cdot \text{Cl}(f, g) \in H^2(\mathfrak{g}, B, \kappa_{a'})$ est reliée avec la classe du cocycle $(\tau_n)_*^2(f, g)$ dans $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ (on regarde τ_n comme un automorphisme de A compatible avec $\text{id}_{\mathfrak{g}}$). Alors la Proposition 2.7.2 nous dit que $n \cdot \text{Cl}(f, g) \in H^2(\mathfrak{g}, B, \kappa_{a'})$ et $\text{Cl}(f, g) \in H^2(\mathfrak{g}, B, \kappa_a)$ ont la même image dans $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ par les relations respectives, ce qui nous donne une relation

$$\iota_*^2 : H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A) \twoheadrightarrow H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa).$$

Proposition 2.9.1. *La suite*

$$H^1(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A, B) \xrightarrow{\delta^1} H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A) \xrightarrow{\iota_*^2} H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa),$$

est exacte.

On remarque que $H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A)$ a le sous-ensemble distingué $N^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A)$ et $H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ est dans ce cas un ensemble pointé, comme il a été remarqué après la Définition 2.6.1, donc l'exactitude a bien un sens.

Démonstration. Exactitude en $H^1(\mathfrak{g}, A, B)$: Si $\eta = \text{Cl}(a) \in H^1(\mathfrak{g}, A, B)$ s'envoie sur un élément de $N^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A)$, alors, quitte à changer a par un cocycle cohomologue approprié, on peut supposer qu'il induit (à travers de la construction de la section précédente) le 2-cocycle $(f, 1)$. On a alors $1 = g_{s,t} = a_{st} {}^s a_t^{-1} a_s^{-1}$, ce qui nous dit que $a \in Z^1(\mathfrak{g}, A)$, et on a bien $\eta \in p_*^1(\text{Cl}(a))$, car f_s est un automorphisme de B pour tout $s \in \mathfrak{g}$ et donc $B = f_s(B) = a_s {}^s B a_s^{-1}$. De même, c'est clair qu'un élément a de $Z^1(\mathfrak{g}, A)$ qui a une image par p_*^1 induit un 2-cocycle neutre.

Exactitude en $H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A)$: On note toujours $\phi : s \mapsto s_{\#}$. Si $(f, g) \in Z^2(\mathfrak{g}, B, \kappa_a)$ s'envoie dans la classe de $(\phi, 1)$, alors on a $(f, g) = c \cdot (\phi, 1)$ pour certain $c \in C^1(\mathfrak{g}, A)$, i.e. $\text{int}(c_s) \circ s_{\#} = f_s \in \text{Aut}(B)$ et $c_{st} s c_t^{-1} c_s^{-1} = g_{s,t} \in B$, donc $c \in Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$ (c.f. les équations (2.2.1)). On voit clairement que $\delta^1(\text{Cl}(c)) = \text{Cl}(f, g)$. De même, on voit que le 2-cocycle induit par un cocycle $a \in Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$ est exactement $a \cdot (\phi, 1)$, donc $\iota_*^2(\delta^1(\text{Cl}(a))) = 1$. \square

Corollaire 2.9.1.1. *Soit B un sous-groupe \mathfrak{g} -invariant de A . Alors la suite*

$$1 \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\iota^0} H^0(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p^0} H^0(\mathfrak{g}, A/B) \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathfrak{g}, B) \\ \xrightarrow{\iota_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A/B) \xrightarrow{\delta^1} H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A) \xrightarrow{\iota_*^2} H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa),$$

est exacte.

Démonstration. Ceci découle immédiatement des Propositions 2.4.2 et 2.9.1 \square

De la même façon que dans la Section 2.4, on suppose maintenant que B est en plus distingué dans A . Dans ce cas, l'une des relations devient une application.

Corollaire 2.9.1.2. *Soit B un sous-groupe distingué \mathfrak{g} -invariant de A . La suite*

$$1 \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\iota^0} H^0(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p^0} H^0(\mathfrak{g}, A/B) \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathfrak{g}, B) \\ \xrightarrow{\iota_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A/B) \xrightarrow{\delta^1} H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A) \xrightarrow{\iota_*^2} H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa),$$

est exacte.

Démonstration. C'est clair. \square

Supposons maintenant que B est un sous-groupe centrale. Dans ce cas il n'y a qu'un \mathfrak{g} -lien sur B induit par les cocycles dans $Z^1(\mathfrak{g}, A, B)$, c'est celui induit par l'action de \mathfrak{g} (i.e. par ϕ). On voit alors que l'ensemble $H^2(\mathfrak{g}, B \text{ rel } A)$ s'identifie avec $H^2(\mathfrak{g}, B, \phi)$. Cet ensemble s'identifie à sa fois au groupe $H^2(\mathfrak{g}, B)$ comme on a remarqué dans la section 2.6. On a alors le

Corollaire 2.9.1.3. *Soit B un sous-groupe central \mathfrak{g} -invariant de A . La suite*

$$1 \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\iota^0} H^0(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p^0} H^0(\mathfrak{g}, A/B) \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathfrak{g}, B) \\ \xrightarrow{\iota_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{p_*^1} H^1(\mathfrak{g}, A/B) \xrightarrow{\delta^1} H^2(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\iota_*^2} H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa),$$

est exacte.

Démonstration. C'est clair d'après le Corollaire 2.9.1.1 et ce que l'on vient de remarquer. \square

De cette dernière suite on en tire une caractérisation des classes neutres qui nous sera utile après.

Corollaire 2.9.1.4. *Soit C le centre de A et κ le \mathfrak{g} -lien trivial induit par ϕ . Alors un élément $\eta \in H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$ est neutre si et seulement si*

$$\eta - \text{Cl}(\phi, 1) \in \text{Im}[\delta^1 : H^1(\mathfrak{g}, A/C) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, C)],$$

où $\eta - \eta'$ est le seul élément de $H^2(\mathfrak{g}, C)$ envoyant η' sur η , c.f. Proposition 2.6.4.

Démonstration. C est bien distingué, central et \mathfrak{g} -invariant. Alors l'exactitude de la suite du dernier corollaire nous dit que pour $\eta = \text{Cl}(\phi, g) \in H^2(\mathfrak{g}, A, \kappa)$, on a $\eta - \text{Cl}(\phi, 1) \in \text{Im}(\delta^1)$ si et seulement si

$$\iota_*^2(\eta - \text{Cl}(\phi, 1)) = \iota_*^2(\text{Cl}(g)) = \text{Cl}(\phi, 1).$$

Or, d'après la définition de ι_*^2 , ceci est vérifié si et seulement si

$$g_{s,t} = a_{st} {}^s a_t^{-1} a_s^{-1}$$

pour un certain $a \in C^1(\mathfrak{g}, A)$. On voit bien que ceci est équivalent à dire que η est neutre, car $\eta = \text{Cl}(\phi, g) = \text{Cl}(a \cdot (\text{int}(a^{-1})\phi, 1))$. \square

Remarque.

Ces suites ne sont que des suites exactes d'ensembles pointés. Alors pour décrire les fibres des applications impliquées, il faut toujours utiliser la torsion par des 1-cocycles. Pour plus de détails sur ce sujet, on pourra regarder [Sp1].

3 Hypercohomologie

Dans cette partie on donnera la définition de la hypercohomologie et on regardera ses propriétés et applications dans le cas des complexes à deux éléments, même dans le cas non abélien. Ces outils seront utilisés pour la définition de l'abélianisation de la cohomologie galoisienne non abélienne.

3.1 Définitions et propriétés

On donne maintenant la définition et quelques propriétés de l'hypercohomologie d'un complexe. La définition et la liste de propriétés que l'on donne dans la Proposition 3.1.1 viennent de [Mi, Appendix C]. Pour une bonne introduction avec démonstrations, on pourra regarder [We, §5.7].

Soit \mathbf{A} une catégorie abélienne et $C(\mathbf{A})$ la catégorie des complexes dans \mathbf{A} . C'est une catégorie abélienne. On se concentre sur la sous-catégorie $C^+(\mathbf{A})$ des complexes A^\bullet bornés inférieurement, i.e. $A^r = 0$ pour $r \ll 0$.

Une morphisme de complexes $A_1^\bullet \rightarrow A_2^\bullet$ est dite un *quasi-isomorphisme* lorsque les applications induites sur la cohomologie sont des isomorphismes $H^r(A_1^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^r(A_2^\bullet)$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas on note $A_1^\bullet \xrightarrow{\sim} A_2^\bullet$.

Soit F un foncteur exact à gauche de \mathbf{A} dans une catégorie abélienne \mathbf{B} . Supposons que \mathbf{A} a assez d'injectifs. Alors on peut montrer que pour tout $A^\bullet \in C^+(\mathbf{A})$ il existe un complexe $I^\bullet \in C^+(\mathbf{A})$ tel que I^r soit injectif pour tout r et un quasi-isomorphisme $A^\bullet \rightarrow I^\bullet$. Les foncteurs $H^r(FI^\bullet) : C^+(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{B}$ sont appelés les foncteurs hyperdérivés à droite $\mathbb{R}^r F$ de F .

Lorsque le foncteur F est celui de la cohomologie de groupes classique, i.e. $F : A \mapsto A^{\mathfrak{g}}$ pour un groupe \mathfrak{g} , on écrit $\mathbb{H}^r(\mathfrak{g}, A^\bullet) := \mathbb{R}^r F A^\bullet$ pour A^\bullet un complexe de \mathfrak{g} -modules. De même, dans le cadre de la cohomologie galoisienne, on notera $\mathbb{H}^r(k, A^\bullet) := \mathbb{H}^r(\text{Gal}(\bar{k}/k), A^\bullet)$ pour A^\bullet un complexe de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -modules.

Proposition 3.1.1. *Les foncteurs $\mathbb{R}^r F$ jouissent des propriétés suivantes :*

- (i) *Si $0 \rightarrow A_1^\bullet \rightarrow A_2^\bullet \rightarrow A_3^\bullet \rightarrow 0$ est une suite exacte de complexes dans $C^+(\mathbf{A})$, alors on a une suite exacte longue*

$$\dots \rightarrow \mathbb{R}^{r-1} F A_3^\bullet \rightarrow \mathbb{R}^r F A_1^\bullet \rightarrow \mathbb{R}^r F A_2^\bullet \rightarrow \mathbb{R}^r F A_3^\bullet \rightarrow \mathbb{R}^{r+1} F A_1^\bullet \rightarrow \dots$$

- (ii) *Si on regarde $A \in \mathbf{A}$ comme un complexe avec $A^0 = A$ et $A^r = 0$ si $r \neq 0$, alors $\mathbb{R}^r F A = R^r F A$.*
- (iii) *Soit $C_0(\mathbf{A})$ la sous-catégorie de $C^+(\mathbf{A})$ des complexes A^\bullet avec $A^r = 0$ pour $r < 0$. Les foncteurs $\mathbb{R}^r F$ restreints à $C_0(\mathbf{A})$ sont les foncteurs dérivés à droite du foncteur $C_0(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{B}$, $A^\bullet \mapsto \mathbb{R}^0 F A^\bullet = \text{Ker}(A^0 \rightarrow A^1)$.*
- (iv) *Un quasi-isomorphisme $A_1^\bullet \xrightarrow{\sim} A_2^\bullet$ induit des isomorphismes $\mathbb{R}^r F A_1^\bullet \rightarrow \mathbb{R}^r F A_2^\bullet$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$.*
- (v) *Si A^\bullet est exact, alors $\mathbb{R}^r F A^\bullet = 0$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$.*
- (vi) *Si les éléments de A^\bullet sont acycliques pour F , i.e. $R^r F A^s = 0$ pour toute paire (r, s) avec $r > 0$, alors $\mathbb{R}^r F A^\bullet = H^r(F A^\bullet)$.*
- (vii) *Pour tout complexe $A^\bullet \in C^+(\mathbf{A})$, on a les suites spectrales*

$$E_1^{r,s} = R^s F A^r \Rightarrow \mathbb{R}^{r+s} F A^\bullet, \quad E_2^{r,s} = R^r F(H^s(A^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{R}^{r+s} F A^\bullet.$$

Nous n'utiliserons que des complexes de longueur 2. Plus précisément, des complexes A^\bullet avec $A^r = 0$ pour tout $r \neq -1, 0$. On les notera $A^\bullet = (A^{-1} \rightarrow A^0)$. Dans ce cas, on peut calculer l'hypercohomologie de la forme suivante :
On considère le double complexe à lignes exactes

$$\begin{array}{cccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & I^{0,0} & \longrightarrow & I^{1,0} & \longrightarrow & I^{2,0} & \longrightarrow & \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^{-1} & \longrightarrow & I^{0,-1} & \longrightarrow & I^{1,-1} & \longrightarrow & I^{2,-1} & \longrightarrow & \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où les $I^{\bullet,r}$, $r = -1, 0$, sont des résolutions injectives de A^r . On rappelle qu'un double complexe est un diagramme anticommutatif, i.e. les deux chemins possibles pour un carré induisent l'inverse (additif) de l'autre. Ce diagramme existe par exemple par le "Horseshoe Lemma" (c.f. [We, Lemma 2.2.8]), et même dans un cadre plus général (c.f. [We, Lemma 5.7.2]). On voit facilement que le complexe induit par ce diagramme en sortant les A^r ,

$$I_A^\bullet = (\dots \rightarrow 0 \rightarrow I^{0,-1} \rightarrow (I^{1,-1} \oplus I^{0,0}) \rightarrow (I^{2,-1} \oplus I^{1,0}) \rightarrow \dots),$$

où $I^{0,-1}$ est en degré -1 , est quasi-isomorphe au complexe A^\bullet . On a alors $\mathbb{R}^r FA^\bullet = H^r(FI_A^\bullet)$.

Remarque.

Dans ce cas, un quasi-isomorphisme $A_1^\bullet \xrightarrow{\sim} A_2^\bullet$ est équivalent aux isomorphismes $\text{Ker}(\alpha_1) \rightarrow \text{Ker}(\alpha_2)$ et $\text{Coker}(\alpha_1) \rightarrow \text{Coker}(\alpha_2)$, où α_i est le morphisme $A_i^{-1} \rightarrow A_i^0$.

Regardons le cas de la cohomologie de groupes. Soit \mathfrak{g} un groupe (profini) et $(B \rightarrow A)$ un complexe de \mathfrak{g} -modules. On a le double complexe à lignes exactes

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & C^1(\mathfrak{g}, A) & \longrightarrow & C^2(\mathfrak{g}, A) & \longrightarrow & C^3(\mathfrak{g}, A) & \longrightarrow & \dots \\
& & \uparrow & \times(-1) & \uparrow & & \uparrow & \times(-1) & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C^1(\mathfrak{g}, B) & \longrightarrow & C^2(\mathfrak{g}, B) & \longrightarrow & C^3(\mathfrak{g}, B) & \longrightarrow & \dots,
\end{array}$$

où $C^i(\mathfrak{g}, A)$ est le groupe des applications continues $c : \mathfrak{g} \rightarrow A$ et le symbole $\times(-1)$ veut dire que l'on multiplie le morphisme par (-1) de façon à avoir l'anticommutativité. Ce diagramme induit, en enlevant A et B , le complexe quasi-isomorphe à $(B \rightarrow A)$,

$$C_{B \rightarrow A}^\bullet = (\dots \rightarrow 0 \rightarrow C^1(\mathfrak{g}, B) \rightarrow (C^2(\mathfrak{g}, B) \oplus C^1(\mathfrak{g}, A)) \rightarrow (C^3(\mathfrak{g}, B) \oplus C^2(\mathfrak{g}, A)) \rightarrow \dots).$$

On peut alors calculer $\mathbb{H}^i(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ comme $H^i((C_{B \rightarrow A}^\bullet)^\mathfrak{g}) = H^i(C_{B \rightarrow A}^\bullet)$, où $C_{B \rightarrow A}^\bullet$ est le complexe

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow C^0(\mathfrak{g}, B) \rightarrow (C^1(\mathfrak{g}, B) \oplus C^0(\mathfrak{g}, A)) \rightarrow (C^2(\mathfrak{g}, B) \oplus C^1(\mathfrak{g}, A)) \rightarrow \dots,$$

et $C^i(\mathfrak{g}, A), C^i(\mathfrak{g}, B)$ sont les groupes classiques des i -cochaînes non homogènes (c.f. par exemple [NSW, Chapter 1, §2] pour la définition et l'égalité $(C^i)^\mathfrak{g} = C^{i-1}$). On note que $C^0(\mathfrak{g}, B)$ est en degré -1 , donc en particulier on a $\mathbb{H}^i(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) = 0$ pour $i < -1$.

Exemples 3.1.2.

Pour A, B des \mathfrak{g} -modules, on a

- (1) $\mathbb{H}^{-1}(\mathfrak{g}, B \xrightarrow{\alpha} A) = \text{Ker}(B \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}, B) \oplus A) = (\text{Ker}(\alpha))^{\mathfrak{g}}$. (Rappelons que $\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}, X) = X$)
(2) $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow 0) = \text{Ker}(\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}, B) \rightarrow \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}, B)) = H^1(\mathfrak{g}, B)$. Plus généralement on a, pour $i \geq 0$,

$$\mathbb{H}^i(\mathfrak{g}, B \rightarrow 0) = H^{i+1}(\mathfrak{g}, B).$$

- (3) $\mathbb{H}^i(\mathfrak{g}, 0 \rightarrow A) = H^i(\mathfrak{g}, A)$ d'après la Proposition 3.1.1 (ii).

3.2 Hypercohomologie non abélienne : Degrés -1 et 0

Soit \mathfrak{g} un groupe et $(B \xrightarrow{\alpha} A)$ un complexe de \mathfrak{g} -groupes (pas nécessairement abéliens) à deux éléments (toujours en degrés -1 et 0). On définit son groupe de -1 -hypercohomologie comme

$$\mathbb{H}^{-1}(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) = (\text{Ker}(\alpha))^{\mathfrak{g}}.$$

On définit l'ensemble de 0 -hypercohomologie $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ en termes des cocycles. On pose

$$\begin{aligned} C^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) &= C^1(\mathfrak{g}, B) \times A, \\ Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) &= \{(\psi, a) \in C^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) \mid \psi_{st} = \psi_s {}^s\psi_t, {}^s a = \alpha(\psi_s)^{-1} a\}. \end{aligned}$$

Les ensembles $C^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ et $Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ sont les ensembles des 0 -cochaînes et 0 -cocycles respectivement. Le groupe B agit à droite sur $Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ par la formule $(\psi, a) \cdot b = (\psi \cdot b, a \cdot b)$, où

$$(\psi \cdot b)_s = b^{-1} \psi_s {}^s b, \quad a \cdot b = \alpha(b)^{-1} a.$$

On pose alors $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) = Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)/B$. Cet ensemble a un élément distingué, à savoir, la classe du cocycle $(1, 1) \in Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$.

Remarque.

Lorsque A et B sont abéliens, $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ a une structure de groupe (c.f. Section 3.3) et les groupes $\mathbb{H}^i(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ avec $i = -1, 0$ coïncident avec les groupes d'hypercohomologie classiques.

Exemples 3.2.1.

- (1) $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, 1 \rightarrow A) = H^0(\mathfrak{g}, A)$.
(2) $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow 1) = H^1(\mathfrak{g}, B)$. Pour trouver cette égalité, on associe $\text{Cl}(\psi, 1) \in \mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow 1)$ avec $\text{Cl}(\psi) \in H^1(\mathfrak{g}, B)$.
(3) Si α est injective, alors $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) = H^0(\mathfrak{g}, B \setminus A)$, donc $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) = H^0(\mathfrak{g}, \text{Coker}(\alpha))$ lorsque $B \triangleleft A$. Ici on associe $\text{Cl}(\psi, a)$ avec $\bar{a} \in B \setminus A$.
(4) Si α est surjective, alors $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) = H^1(\text{Ker}(\alpha))$, où l'on associe $\text{Cl}(\psi, a)$ avec $\text{Cl}(\psi \cdot b)$, où b est une préimage de a par α .

Soit $\varepsilon : (B_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_1) \rightarrow (B_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_2)$ un morphisme de complexes de \mathfrak{g} -groupes, i.e. un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \longrightarrow & B_2 \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\ A_1 & \longrightarrow & A_2 \end{array}$$

de \mathfrak{g} -groupes. On voit facilement qu'on a des applications induites

$$\begin{aligned} \varepsilon_*^{-1} &: \mathbb{H}^{-1}(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2), \\ \varepsilon_*^0 &: \mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1) \rightarrow \mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2), \end{aligned}$$

où ε_*^{-1} est un morphisme de groupes et ε_*^0 un morphisme d'ensembles pointés. En degré -1 , ε_* vient du morphisme $\text{Ker}(\alpha_1) \rightarrow \text{Ker}(\alpha_2)$ induit sur la cohomologie des complexes. En degré 0 on voit directement de la construction des cocycles que ε_* envoie la classe triviale de $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1)$ dans la classe triviale de $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2)$.

3.3 Modules croisés

Pour définir la 1-hypercohomologie non abélienne, on a besoin des modules croisés. On en donnera ici la définition et quelques propriétés basiques. Pour plus d'information sur ce sujet, on pourra regarder [Br] et [BH].

Définition 3.3.1. Un module croisé (à gauche) est un complexe à deux éléments $(B \xrightarrow{\alpha} A)$ muni d'une action (à gauche) de A sur B telle que, pour $a \in A$ et $b, b' \in B$,

$${}^a(bb') = {}^a b {}^a b', \quad (3.3.1)$$

$$bb'b^{-1} = {}^{\alpha(b)} b', \quad (3.3.2)$$

$$\alpha({}^a b) = a\alpha(b)a^{-1}. \quad (3.3.3)$$

On dit qu'un groupe \mathfrak{g} agit sur un module croisé $(B \xrightarrow{\alpha} A)$ si A, B sont des \mathfrak{g} -groupes et l'action de \mathfrak{g} est telle que, pour $a \in A$, $b \in B$ et $s \in \mathfrak{g}$,

$$\alpha({}^s b) = {}^s(\alpha(b)), \quad {}^s({}^a b) = {}^{s a}({}^s b).$$

Exemples 3.3.2.

- (1) Les modules croisés abéliens : A et B sont des groupes abéliens et l'action de A sur B est triviale.
- (2) B un A -module (donc abélien) et α trivial.
- (3) B un sous-groupe distingué de A , $\alpha : B \hookrightarrow A$ l'inclusion et ${}^a b = aba^{-1}$.
- (4) $\alpha : B \rightarrow A$ un morphisme surjectif à noyau central, l'action étant la conjugaison par une préimage de α .
- (5) $\alpha : B \rightarrow \text{Aut} B$, $b \mapsto \text{int}(b)$, pour tout groupe B .

Tout module croisé est essentiellement une combinaison des exemples (3) et (4). En effet, on a la

Proposition 3.3.3. Soit $(B \xrightarrow{\alpha} A)$ un module croisé. Alors

- (i) $\text{Ker}(\alpha)$ est central dans B .
- (ii) $\text{Im}(\alpha)$ est distingué dans A .
- (iii) L'action de A sur B induit une action de $\text{Coker}(\alpha)$ sur $\text{Ker}(\alpha)$.

Démonstration. Pour (i), soit $b \in \text{Ker}(\alpha)$. Alors pour tout $b' \in B$ on a, d'après l'égalité (3.3.2), $bb'b^{-1} = {}^{\alpha(b)} b' = b'$, donc b est bien dans le centre de B .

Pour (ii), il suffit de récrire l'égalité dans (3.3.3) : pour $b \in B$ et $a \in A$, on a $a\alpha(b)a^{-1} = \alpha({}^a b)$.

Pour (iii), toujours par (3.3.2), on a que pour $b' \in \text{Ker}(\alpha)$ et $b \in B$, ${}^{\alpha(b)} b' = bb'b^{-1} = b'$, donc $\text{Im}(\alpha)$ agit trivialement sur $\text{Ker}(\alpha)$. En plus, $\text{Ker}(\alpha)$ est clairement A -invariant, car $\alpha({}^a b) = a\alpha(b)a^{-1} = 1$ pour $b \in \text{Ker}(\alpha)$, d'où l'action de $\text{Coker}(\alpha)$. \square

Un morphisme de modules croisés $\varepsilon : (B_1 \rightarrow A_1) \rightarrow (B_2 \rightarrow A_2)$ est un morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\varepsilon_B} & B_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \xrightarrow{\varepsilon_A} & A_2 \end{array}$$

tel que ε_B est ε_A -équivariant, i.e. pour $a \in A$ et $b \in B$ on a $\varepsilon_B({}^a b) = \varepsilon_A({}^a(\varepsilon_B(b)))$.

Soit maintenant $(B \xrightarrow{\alpha} A)$ un module croisé de \mathfrak{g} -groupes. Dans ce cas on peut définir une structure de groupe sur $C^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ de la façon suivante. On pose, pour $(\psi, a), (\psi', a') \in C^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$,

$$(\psi, a)(\psi', a') = (\psi'', aa'), \text{ où } \psi'' = {}^a\psi'_s\psi_s.$$

On voit clairement que $(1, 1)$ est l'élément neutre et que l'inverse de (ψ, a) est $({}^{a^{-1}}\psi_s^{-1}, a^{-1})$. L'associativité se vérifie par un calcul direct.

D'autre part si $(\psi, a), (\psi', a') \in Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$, en utilisant les équations (3.3.1), (3.3.2) et (3.3.3), on trouve les égalités, pour $s, t \in \mathfrak{g}$,

$${}^a({}^s\psi'_t) = \alpha(\psi_s)^s a({}^s\psi'_t) = \psi_s^s a({}^s\psi'_t)\psi_s^{-1} = \psi_s^s ({}^a\psi'_t)\psi_s^{-1},$$

d'où l'égalité

$${}^a\psi'_{st}\psi_{st} = {}^a\psi_s^a({}^s\psi'_t)\psi_s^s\psi_t = {}^a\psi'_s\psi_s^s({}^a\psi'_t)^s\psi_t = {}^a\psi'_s\psi_s^s({}^a\psi'_t\psi_t).$$

En plus, toujours en utilisant ces égalités, on a

$${}^s(aa') = {}^s a^s a' = \alpha(\psi_s)^{-1} a \alpha(\psi'_s)^{-1} a' = \alpha(\psi_s)^{-1} \alpha({}^a\psi'_s)^{-1} aa' = \alpha({}^a\psi'_s\psi_s)^{-1} aa'.$$

On voit alors que $Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ est fermé par cette multiplication. Il est alors un sous-groupe de $C^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$, car pour $(\psi, a) \in Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ on a $(\psi, a)^{-1} = ({}^{a^{-1}}\psi_s^{-1}, a^{-1}) \in Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} {}^{a^{-1}}\psi_s^{-1}({}^{a^{-1}}\psi_t^{-1}) &= {}^{a^{-1}}\psi_s^{-1}({}^s a^{-1}({}^s\psi_t^{-1})) = {}^{a^{-1}}\psi_s^{-1} a^{-1\alpha(\psi_s)}({}^s\psi_t^{-1}) = {}^{a^{-1}}\psi_s^{-1} a^{-1}(\psi_s^s\psi_t^{-1}\psi_s^{-1}) = {}^{a^{-1}}\psi_{st}^{-1}, \\ {}^s a^{-1} &= a^{-1}\alpha(\psi_s) = a^{-1}\alpha(\psi_s)aa^{-1} = \alpha({}^{a^{-1}}\psi_s)a^{-1} = \alpha({}^{a^{-1}}\psi_s^{-1})^{-1}a^{-1}. \end{aligned}$$

On définit un morphisme $\lambda : B \rightarrow Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ par $b \mapsto (1, 1) \cdot b^{-1} = (s \mapsto b^{-1}s, \alpha(b))$. En utilisant (3.3.2) et (3.3.3), on a, pour $(\psi, a) \in Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$,

$$\begin{aligned} (\psi \cdot b)_s &= b^{-1}\psi_s^s b = \alpha(b)^{-1}\psi_s b^{-1}s b, \\ (\psi \cdot b)_s &= b^{-1}\psi_s^s b = b^{-1\alpha(\psi_s)}({}^s b)\psi_s = {}^{aa^{-1}}b^{-1}a^s a^{-1}({}^s b)\psi_s = {}^a\left({}^{a^{-1}}b^{-1}({}^{a^{-1}}b)\right)\psi_s. \end{aligned}$$

Ces égalités nous disent que $(\psi, a) \cdot b = \lambda(b^{-1})(\psi, a) = (\psi, a)\lambda({}^{a^{-1}}b)$, d'où on en tire que $\lambda(B)$ est distingué dans $Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ et $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) = Z^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)/\lambda(B)$, donc on a une structure de groupe sur $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$.

3.4 1-hypercohomologie non abélienne

Soit $(B \rightarrow A)$ un module croisé de \mathfrak{g} -groupes. On définit l'ensemble de 1-hypercohomologie $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ au moyen des cocycles comme suit. Soit

$$Z^1(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) = \{(h, \varphi) \in C^2(\mathfrak{g}, B) \times C^1(\mathfrak{g}, A) \mid \varphi_{st} = \alpha(h_{s,t})\varphi_s^s\varphi_t, h_{s,tu}{}^{\varphi_s}({}^s h_{t,u}) = h_{st,u}h_{s,t}\},$$

l'ensemble des 1-cocycles. On définit une action à droite du groupe $C^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ sur $Z^1(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ par la formule $(h, \varphi) \cdot (\psi, a) = (h', \varphi')$, avec

$$\begin{aligned} \varphi'_s &= a^{-1}\alpha(\psi_s)\varphi_s^s a, \\ h'_{s,t} &= {}^{a^{-1}}(\psi_{st}h_{s,t}{}^{\varphi_s}({}^s\psi_t^{-1})\psi_s^{-1}). \end{aligned}$$

On définit alors $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) = Z^1(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)/C^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$. On note qu'il s'agit d'un ensemble pointé avec la classe du cocycle $(1, 1)$ comme élément distingué.

Remarque.

Lorsque A et B sont abéliens, on peut munir $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ d'une structure de groupe de la même façon qu'on l'a fait avec $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ dans la section précédente. Ce groupe coïncide en fait avec le groupe de 1-hypercohomologie classique.

Un morphisme de modules croisés $\varepsilon : (B_1 \rightarrow A_1) \rightarrow (B_2 \rightarrow A_2)$ induit un morphisme d'ensembles pointés $\varepsilon_*^1 : \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1) \rightarrow \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2)$.

Exemples 3.4.1.

- (1) $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, 1 \rightarrow A) = H^1(\mathfrak{g}, A)$. On identifie $\text{Cl}(1, \varphi) \in \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, 1 \rightarrow A)$ avec $\text{Cl}(\varphi) \in H^1(\mathfrak{g}, A)$.
- (2) $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B \rightarrow 1) = H^2(\mathfrak{g}, B)$. En effet, dans ce cas $B = \text{Ker}(\alpha)$ est abélien (c.f. Proposition 3.3.3) et on associe $\text{Cl}(h, 1) \in \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B \rightarrow 1)$ avec $\text{Cl}(h) \in H^2(\mathfrak{g}, B)$.
- (3) Si $\alpha : B \rightarrow A$ est injective, alors $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) = H^1(\mathfrak{g}, \text{Coker}(\alpha))$. En effet, dans ce cas $B = \text{Im}(\alpha) \triangleleft A$ (c.f. Proposition 3.3.3) et alors le morphisme $(B \rightarrow A) \rightarrow (1 \rightarrow \text{Coker}(\alpha))$ est un morphisme de modules croisés induisant l'égalité.
- (4) Si α est surjective, c'est le plongement $(\text{Ker}(\alpha) \rightarrow 1) \rightarrow (B \rightarrow A)$ qui induit l'égalité $H^2(\mathfrak{g}, \text{Ker}(\alpha)) = \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$. On note que d'après la preuve de la Proposition 3.3.3, A agit trivialement sur $\text{Ker}(\alpha)$, donc on a bien un morphisme de modules croisés.

3.5 Suites exactes et quasi-isomorphismes

On donne dans cette section deux résultats importants (Proposition 3.5.2 et Théorème 3.5.4) sur les ensembles que l'on a défini dans cette partie. Pour les démonstrations de ces résultats, on pourra regarder [Bo3, 3.4, 3.5].

On commence avec les suites exactes.

Définition 3.5.1. Une suite exacte de complexes de groupes

$$1 \rightarrow (B_1 \rightarrow A_1) \rightarrow (B_2 \rightarrow A_2) \rightarrow (B_3 \rightarrow A_3) \rightarrow 1,$$

est un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Proposition 3.5.2. *Soit*

$$1 \rightarrow (B_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_1) \xrightarrow{\iota} (B_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_2) \xrightarrow{p} (B_3 \xrightarrow{\alpha_3} A_3) \rightarrow 1, \quad (3.5.1)$$

une suite exacte de complexes de \mathfrak{g} -groupes. On suppose que ι est un morphisme de modules croisés avec action de \mathfrak{g} et que le sous-groupe $\iota(B_1) \subset B_2$ est A_2 -invariant.

(i) *On a la suite exacte longue d'hypercohomologie*

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\mathfrak{g}, A_1 \rightarrow B_1) \xrightarrow{\iota_*} \mathbb{H}^{-1}(\mathfrak{g}, A_2 \rightarrow B_2) \xrightarrow{p_*} \mathbb{H}^{-1}(\mathfrak{g}, A_3 \rightarrow B_3) \\ \xrightarrow{\delta^{-1}} \mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, A_1 \rightarrow B_1) \xrightarrow{\iota_*} \mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, A_2 \rightarrow B_2) \xrightarrow{p_*} \mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, A_3 \rightarrow B_3) \\ \xrightarrow{\delta^0} \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, A_1 \rightarrow B_1) \xrightarrow{\iota_*} \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, A_2 \rightarrow B_2). \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

(ii) *Le groupe $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2)$ agit à gauche sur l'ensemble $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_3 \rightarrow A_3)$, et δ^0 définit une bijection*

$$\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2) \setminus \mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_3 \rightarrow A_3) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}[\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1) \rightarrow \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2)].$$

(iii) Si en plus p est un morphisme de modules croisés, alors la suite (3.5.2) peut s'étendre jusqu'au terme $\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B_3 \rightarrow A_3)$, i.e. la suite

$$\mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1) \xrightarrow{\iota^*} \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2) \xrightarrow{p^*} \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B_3 \rightarrow A_3),$$

est exacte.

Les applications δ^{-1} et δ^0 sont définies de la façon suivante.

On identifie $(B_1 \rightarrow A_1)$ avec son image par ι . Soit $b_3 \in \mathbb{H}^{-1}(B_3 \rightarrow A_3) = (\text{Ker}(\alpha_3))^{\mathfrak{g}}$. On prend $b \in B_2$ une préimage de b_3 et on pose

$$(\psi_1)_s = b^s b^{-1}, \quad a_1 = \alpha_2(b).$$

On voit que $(\psi_1, a_1) \in C^0(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1)$, car $\alpha_3(p(b)) = 1$, donc $\alpha_2(b)$ est bien dans A_1 par exactitude de (3.5.1), et l'invariance par \mathfrak{g} de b_3 nous dit que ψ_1 est bien à valeurs dans B_1 , toujours par exactitude de (3.5.1). On vérifie par un calcul direct que $(\psi_1, a_1) \in Z^0(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1)$, donc on pose $\delta^{-1}(b_3) = \text{Cl}(\psi_1, a_1)$.

Soit $\xi_3 = \text{Cl}(\psi_3, a_3) \in \mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_3 \rightarrow A_3)$. On prend $\psi \in C^1(\mathfrak{g}, B_2)$ relevant ψ_3 et $a \in A_2$ une préimage de a_3 . On pose alors,

$$\begin{aligned} (\varphi_1)_s &= a^{-1} \alpha_2(\psi_s)^s a, \\ (h_1)_{s,t} &= a^{-1} (\psi_{st}^s \psi_t^{-1} \psi_s^{-1}). \end{aligned}$$

On voit par un calcul direct que $(h_1, \varphi_1) \in Z^1(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1)$ et on pose alors $\delta^0(\xi_3) = \text{Cl}(h_1, \varphi_1) \in \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1)$.

L'action du groupe $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2)$ sur l'ensemble $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_3 \rightarrow A_3)$ est donnée par la formule

$$\text{Cl}(\psi_2, a_2) \cdot \text{Cl}(\psi_3, a_3) = \text{Cl}(p^{(a_2)} \psi_3 \psi_2, p(a_2) a_3).$$

Corollaire 3.5.2.1. Soit $(B \rightarrow A)$ un module croisé de \mathfrak{g} -groupes

(i) On a une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, B) \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, A) \rightarrow \mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, B) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, A).$$

(ii) Le groupe $\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)$ agit sur $H^1(\mathfrak{g}, B)$ et on a une bijection canonique

$$\mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B \rightarrow A) \backslash H^1(\mathfrak{g}, B) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}[H^1(\mathfrak{g}, A) \rightarrow \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B \rightarrow A)].$$

Démonstration. Les deux affirmations découlent toute de suite de la Proposition 3.5.2 en prenant la suite de complexes $1 \rightarrow (B \rightarrow 1) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (1 \rightarrow A) \rightarrow 1$. On remarque que les applications $H^0(\mathfrak{g}, B) \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, A)$ et $H^1(\mathfrak{g}, B) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, A)$ ne sont pas à priori les applications canoniques, car elles correspondent dans la suite exacte longue aux applications δ^{-1} et δ^0 . Or, en regardant la description des δ^i que l'on vient de donner, on voit qu'elles coïncident avec les applications évidentes. \square

On passe maintenant aux quasi-isomorphismes de modules croisés. Sa définition étant évidente, on donne toute de suite des exemples.

Exemples 3.5.3.

Soient A, B des \mathfrak{g} -groupes.

(1) Si B est un sous-groupe distingué de A , alors $(B \rightarrow A) \rightarrow (1 \rightarrow A/B)$ est un quasi-isomorphisme.

(2) Si $B \xrightarrow{\alpha} A$ est un module croisé et α est surjective, alors $(\text{Ker}(\alpha) \rightarrow 1) \rightarrow (B \rightarrow A)$ est un quasi-isomorphisme.

Théorème 3.5.4. *Soit $\varepsilon : (B_1 \rightarrow A_1) \rightarrow (B_2 \rightarrow A_2)$ un quasi-isomorphisme de modules croisés de \mathfrak{g} -groupes. Alors les applications induites*

$$\begin{aligned}\varepsilon_*^{-1} &: \mathbb{H}^{-1}(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2), \\ \varepsilon_*^0 &: \mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1) \rightarrow \mathbb{H}^0(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2), \\ \varepsilon_*^1 &: \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B_1 \rightarrow A_1) \rightarrow \mathbb{H}^1(\mathfrak{g}, B_2 \rightarrow A_2),\end{aligned}$$

sont des isomorphismes de groupes pour $i = -1, 0$ et d'ensembles pointés pour $i = 1$.

4 Abélianisation de la cohomologie galoisienne non abélienne

Dans cette partie on présente les applications d'abélianisation définies par Borovoi (c.f. [Bo1] et [Bo2]). Pour bien comprendre cette partie le lecteur devrait avoir une familiarité avec les groupes algébriques linéaires et leurs propriétés. Pour les définitions et propriétés basiques, on pourra regarder [Hu], [Sp2], et [Wa]. Pour les résultats classiques sur les groupes réductifs on pourra regarder [BT].

On fixe pour toujours un corps k de caractéristique 0. On note \bar{k} sa clôture algébrique et $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Tous les groupes algébriques sont supposés linéaires

4.1 Groupe fondamental algébrique

Soit G un groupe algébrique réductif connexe sur k . On note $\bar{G} = G_{\bar{k}} = G \times_k \text{Spec}(\bar{k})$. Soit $T \subset \bar{G}$ un tore maximal et considérons l'application canonique $\rho : \bar{G}^{\text{sc}} \rightarrow \bar{G}$. On écrit $T^{(\text{sc})}$ pour $\rho^{-1}(T) \subset \bar{G}^{\text{sc}}$. On pose alors $\pi_1(\bar{G}, T) = X_*(T)/\rho_*X_*(T^{(\text{sc})})$.

Lemme 4.1.1. *Si T, T' sont des tores maximaux de \bar{G} , alors $\pi_1(\bar{G}, T)$ est canoniquement isomorphe à $\pi_1(\bar{G}, T')$.*

Démonstration. On choisit $g \in G(\bar{k})$ tel que $T' = gTg^{-1}$. L'application $\text{int}(g) : T \rightarrow T'$ induit par composition à gauche un isomorphisme $g_* : X_*(T) \rightarrow X_*(T')$ d'inverse $(g^{-1})_*$. Cet isomorphisme passe au quotient en une application $g_* : \pi_1(\bar{G}, T) \rightarrow \pi_1(\bar{G}, T')$, car si g' est une préimage de g par ρ , alors $T'^{\text{sc}} = g'T^{\text{sc}}g'^{-1}$. De même, $(g^{-1})_*$ passe au quotient en une application $(g^{-1})_* : \pi_1(\bar{G}, T') \rightarrow \pi_1(\bar{G}, T)$, ce qui nous dit que l'application quotient est un isomorphisme.

Il s'agit alors de montrer que g_* ne dépend pas de g . Pour cela, il suffit de montrer que si g est dans le normalisateur N de T , alors l'application $g_* : \pi_1(\bar{G}, T) \rightarrow \pi_1(\bar{G}, T)$ est l'identité. N agit sur T à travers du groupe de Weyl $W = N/T$ et on sait que ce groupe est engendré par les réflexions

$$r_{\alpha^\vee} : X_*(T) \rightarrow X_*(T), x \mapsto x - \langle \alpha, x \rangle \alpha^\vee \quad \alpha \in R(\bar{G}, T),$$

où $R(\bar{G}, T)$ est l'ensemble de racines de \bar{G} par rapport à T et α^\vee est la co-racine correspondante. Il suffit alors de démontrer que ces morphismes induisent l'identité sur $\pi_1(\bar{G}, T)$. Or, on sait que toutes les racines viennent de $X_*(T^{\text{sc}})$, et alors $r_{\alpha^\vee}(x) \equiv x \pmod{\rho_*X_*(T)}$. \square

Définition 4.1.2. Le groupe fondamental algébrique de G est $\pi_1(\bar{G}) = \pi_1(\bar{G}, T)$ pour $T \subset \bar{G}$ un tore maximal. Cette définition a un sens d'après le dernier lemme.

On sait que Γ agit sur $G(\bar{k})$. Cette action induit une action sur $\pi_1(\bar{G})$ qui peut être décrite de la façon suivante : On fixe T un tore maximal. Pour $\sigma \in \Gamma$, on choisit $g_\sigma \in G(\bar{k})$ tel que $g_\sigma^\sigma T g_\sigma^{-1} = T$. Alors σ agit sur $\pi_1(\bar{G}) = \pi_1(\bar{G}, T)$ par la composition

$$\pi_1(\bar{G}, T) \xrightarrow{\sigma_*} \pi_1(\bar{G}, \sigma T) \xrightarrow{(g_\sigma)_*} \pi_1(\bar{G}, T).$$

Proposition 4.1.3. *Soit $1 \rightarrow G_1 \xrightarrow{\iota} G_2 \xrightarrow{\rho} G_3 \rightarrow 1$ une suite exacte de groupes algébriques sur k (réductifs, connexes). Alors la suite de Γ -modules*

$$0 \rightarrow \pi_1(\bar{G}_1) \rightarrow \pi_1(\bar{G}_2) \rightarrow \pi_1(\bar{G}_3) \rightarrow 0,$$

est exacte.

Pour la preuve de ce résultat, voir [CT, Proposition 6.8].

Corollaire 4.1.3.1. *Pour tout k -groupe G réductif et connexe, on a la suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\bar{k}}(\hat{\mathbb{Z}}(1), \mathrm{Ker}\rho) \rightarrow \pi_1(\bar{G}) \rightarrow X_*(\bar{G}^{\mathrm{tor}}) \rightarrow 0.$$

Démonstration. Il suffit de considérer la suite $1 \rightarrow G^{\mathrm{ss}} \rightarrow G \rightarrow G^{\mathrm{tor}} \rightarrow 1$ et utiliser la Proposition 4.1.3 pour trouver la suite

$$0 \rightarrow \pi_1(\bar{G}^{\mathrm{ss}}) \rightarrow \pi_1(\bar{G}) \rightarrow \pi_1(\bar{G}^{\mathrm{tor}}) \rightarrow 0.$$

Or, c'est clair que $\pi_1(\bar{G}^{\mathrm{tor}}) = X_*(\bar{G}^{\mathrm{tor}})$ et on peut montrer aussi que $\pi_1(\bar{G}^{\mathrm{ss}}) = \mathrm{Hom}_{\bar{k}}(\hat{\mathbb{Z}}(1), \mathrm{Ker}\rho)$, ce qui conclut la preuve. On rappelle que $\hat{\mathbb{Z}}(1) = \varprojlim \mu_n$ (voir notations au début). \square

Soit maintenant $\psi \in Z^1(k, G^{\mathrm{ad}})$ un cocycle. On considère le groupe tordu ${}_{\psi}G$, c.f. l'Exemple 2.3.2.

Proposition 4.1.4. *L'application $\pi_1(G_{\bar{k}}) \rightarrow \pi_1({}_{\psi}G_{\bar{k}})$, induite par l'isomorphisme canonique $G_{\bar{k}} \rightarrow ({}_{\psi}G)_{\bar{k}}$, est un isomorphisme de Γ -modules.*

Démonstration. On note $\psi'_{\sigma} \in G(\bar{k})$ un élément relevant $\psi_{\sigma} \in G^{\mathrm{ad}}(\bar{k})$. L'action de σ sur $\pi_1({}_{\psi}G_{\bar{k}})$ est alors la composition, pour $T \subset \bar{G}$ un tore maximal,

$$\pi_1({}_{\psi}G_{\bar{k}}, T) \xrightarrow{\sigma_*} \pi_1({}_{\psi}G_{\bar{k}}, \sigma T) \xrightarrow{(\psi'_{\sigma})_*} \pi_1({}_{\psi}G_{\bar{k}}, \sigma*\psi T) \xrightarrow{(g_{\sigma})_*} \pi_1({}_{\psi}G_{\bar{k}}, T),$$

pour un certain $g_{\sigma} \in G(\bar{k})$. Or, d'après le Lemme 4.1.1 et la description de l'action de Γ , on voit que $(g_{\sigma})_* \circ (\psi'_{\sigma})_* \circ \sigma_* = (g_{\sigma}\psi_{\sigma})_* \circ \sigma_*$ est bien équivalent à l'action de σ sur $\pi_1(G_{\bar{k}})$. \square

4.2 Cohomologie galoisienne abélienne

On préserve les notations de la section précédente. Soit G un k -groupe réductif connexe. On considère le complexe

$$Z^{\bullet} = (Z^{(\mathrm{sc})} \xrightarrow{\rho} Z),$$

où Z est le centre de G et $Z^{(\mathrm{sc})} = \rho^{-1}(Z)$ celui de G^{sc} .

Définition 4.2.1. On pose $H_{\mathrm{ab}}^i(k, G) = \mathbb{H}^i(k, Z^{\bullet})$. On appelle ce groupe le i -ème groupe de cohomologie galoisienne abélienne.

Lemme 4.2.2. *Soit $T \subset G$ un k -tore maximal. Alors le plongement $(Z^{(\mathrm{sc})} \rightarrow Z) \rightarrow (T^{(\mathrm{sc})} \rightarrow T)$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. On a $\mathrm{Ker}\rho \subset Z^{(\mathrm{sc})} \subset T^{(\mathrm{sc})}$. Alors

$$\mathrm{Ker}(Z^{(\mathrm{sc})} \rightarrow Z) = \mathrm{Ker}(G^{\mathrm{sc}} \rightarrow G) = \mathrm{Ker}(T^{(\mathrm{sc})} \rightarrow T).$$

D'autre part, on a $\mathrm{Coker}\rho = G/\rho(G^{\mathrm{sc}}) = G/G^{\mathrm{ss}} = G^{\mathrm{tor}}$. Or, on sait (c.f. [Hu, 19.5, Lemma]) que $G = G^{\mathrm{ss}}Z = G^{\mathrm{ss}}T$, donc les applications $Z/\rho(Z^{(\mathrm{sc})}) \rightarrow G^{\mathrm{tor}}$ et $T/\rho(T^{(\mathrm{sc})}) \rightarrow G^{\mathrm{tor}}$ sont surjectives. En plus, comme $\rho(Z^{(\mathrm{sc})}) = Z \cap G^{\mathrm{ss}}$ et $\rho(T^{(\mathrm{sc})}) = T \cap G^{\mathrm{ss}}$, on a qu'elles sont aussi injectives, Donc on a

$$\mathrm{Coker}(Z^{(\mathrm{sc})} \rightarrow Z) = \mathrm{Coker}(G^{\mathrm{sc}} \rightarrow G) = \mathrm{Coker}(T^{(\mathrm{sc})} \rightarrow T),$$

ce qui montre qu'on a bien un quasi-isomorphisme $(Z^{(\mathrm{sc})} \rightarrow Z) \rightarrow (T^{(\mathrm{sc})} \rightarrow T)$, d'après la remarque donnée dans la Section 3.1. \square

Remarque.

Borovoi définit les groupes $H_{\mathrm{ab}}^i(k, G)$ comme $\mathbb{H}^i(k, T^{(\mathrm{sc})} \rightarrow T)$ pour $T \subset G$ un k -tore maximal (c.f. [Bo2, Définition 2.2]). Ce dernier lemme nous montre que les deux définitions sont équivalentes.

Soit $T \subset G$ un k -tore maximal. D'après ce qu'on a fait dans la Section 3.1 et le Lemme 4.2.2, on peut calculer $H_{\text{ab}}^i(k, G)$ comme $\mathbb{H}^i(k, T^{(\text{sc})} \rightarrow T) = H^i(\mathcal{C}_T^\bullet)$, où \mathcal{C}_T^\bullet est le complexe

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{C}^0(\Gamma, T^{(\text{sc})}) \rightarrow (\mathcal{C}^1(\Gamma, T^{(\text{sc})}) \oplus \mathcal{C}^0(\Gamma, T)) \rightarrow (\mathcal{C}^2(\Gamma, T^{(\text{sc})}) \oplus \mathcal{C}^1(\Gamma, T)) \rightarrow \cdots,$$

et $\mathcal{C}^0(\Gamma, T^{(\text{sc})})$ est en degré -1 . On a en particulier $H_{\text{ab}}^i(k, G) = 0$ pour $i < -1$. Ici $\mathcal{C}^i(\Gamma, S)$ est l'ensemble des i -cochaînes *continues* du tore S .

Soit maintenant $\beta : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de k -groupes et soient Z_1, Z_2 leurs centres respectifs. Ce morphisme induit un morphisme de complexes $(Z_1^{(\text{sc})} \rightarrow Z_1) \rightarrow (Z_2^{(\text{sc})} \rightarrow Z_2)$, qui en même temps induit des morphismes

$$\beta_*^i : H_{\text{ab}}^i(k, G_1) = \mathbb{H}^i(Z_1^{(\text{sc})} \rightarrow Z_1) \rightarrow \mathbb{H}^i(Z_2^{(\text{sc})} \rightarrow Z_2) = H_{\text{ab}}^i(k, G_2).$$

Ces applications peuvent être définies aussi au moyen des tores maximaux (c.f. [Bo2, 2.5]), mais il faut alors montrer qu'elles ne dépendent pas du choix des tores. En fait, il se trouve que les groupes $H_{\text{ab}}^i(k, G)$, donc a fortiori leurs morphismes aussi, ne dépendent que de $\pi_1(\bar{G})$ et des morphismes $\beta_* : \pi_1(\bar{G}_1) \rightarrow \pi_1(\bar{G}_2)$. Ce fait sera le sujet de la section suivante.

4.3 Le foncteur \mathcal{H}^i

On présente dans cette section les groupes $\mathcal{H}^i(\mathfrak{g}, A, D)$ introduits par Borovoi pour montrer le lien entre les groupes $H_{\text{ab}}^i(k, G)$ et le groupe $\pi_1(\bar{G})$. On en donne quelques propriétés, dont cette relation avec les $H_{\text{ab}}^i(k, G)$. Pour les démonstrations pas données ici, voir [Bo2, 2.6].

Soit \mathfrak{g} un groupe fini et A un \mathfrak{g} -module de type fini. On voit facilement qu'il existe une résolution libre courte de A , i.e. une suite exacte

$$0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow L^0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

de \mathfrak{g} -modules avec L^{-1}, L^0 de type fini et sans torsion comme \mathbb{Z} -modules. Pour D un \mathfrak{g} -module, on considère le complexe $L^\bullet = (L^{-1} \rightarrow L^0)$ et le complexe

$$L^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} D = (L^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}} D \rightarrow L^0 \otimes_{\mathbb{Z}} D).$$

Définition 4.3.1. On définit $\mathcal{H}^i(\mathfrak{g}, A, D) = \mathbb{H}^i(\mathfrak{g}, L^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} D)$.

Remarque.

On peut montrer que ces groupes ne dépendent pas de la résolution choisie (c.f. [Bo2, 2.6]), donc la définition a bien un sens.

Soit U un sous-groupe distingué de \mathfrak{g} . on a des morphismes d'inflation

$$\mathcal{H}^i(\mathfrak{g}/U, A^U, D^U) \rightarrow \mathcal{H}^i(\mathfrak{g}, A, D).$$

Alors, pour Γ un groupe profini, A un Γ -module discret de type fini sur \mathbb{Z} et D un Γ -module discret, on définit

$$\mathcal{H}^i(\Gamma, A, D) = \varinjlim_U \mathcal{H}^i(\Gamma/U, A^U, D^U),$$

où U parcourt les sous-groupes ouverts distingués de Γ .

Le foncteur $A \mapsto \mathcal{H}(\Gamma, A, D)$ est un foncteur cohomologique au sens suivant :

Proposition 4.3.2. Soit $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$ une suite exacte de Γ -modules de type fini sur \mathbb{Z} . Alors on a une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \mathcal{H}^{i-1}(\Gamma, A_3, D) \rightarrow \mathcal{H}^i(\Gamma, A_1, D) \rightarrow \mathcal{H}^i(\Gamma, A_2, D) \rightarrow \mathcal{H}^i(\Gamma, A_3, D) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(\Gamma, A_1, D) \rightarrow \cdots.$$

On donne maintenant le lien entre ce foncteur et les groupes $H_{\text{ab}}^i(k, G)$.

Proposition 4.3.3. *Écrivons $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. On a l'égalité $H_{\text{ab}}^i(k, G) = \mathcal{H}^i(\Gamma, \pi_1(\bar{G}), \bar{k}^*)$.*

Cette proposition nous dit que $H_{\text{ab}}^i(k, G)$ ne dépend que de $\pi_1(\bar{G})$ comme Γ -module. On a en plus d'autres corollaires.

Corollaire 4.3.3.1. *Soit $\psi \in Z^1(k, G^{\text{ad}})$ un cocycle. On a des isomorphismes canoniques*

$$H_{\text{ab}}^i(k, G) \rightarrow H_{\text{ab}}^i(k, \psi G).$$

Démonstration. Ceci découle directement des Propositions 4.1.4 et 4.3.3. \square

Corollaire 4.3.3.2. *Soit $1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 1$ une suite exacte de k -groupes réductifs connexes. Alors on a une suite exacte longue*

$$0 \rightarrow H_{\text{ab}}^{-1}(k, G_1) \rightarrow H_{\text{ab}}^{-1}(k, G_2) \rightarrow H_{\text{ab}}^{-1}(k, G_3) \rightarrow H_{\text{ab}}^0(k, G_1) \rightarrow \dots \quad (4.3.1)$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement des Propositions 4.1.3, 4.3.2 et 4.3.3. \square

La suite (4.3.1) peut être obtenue de façon explicite comme suit.

On choisit $T_2 \subset G_2$ un k -tore maximal et on pose T_1 son image inverse dans G_1 et T_3 son image dans G_3 . On a alors la suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow (T_1^{(\text{sc})} \rightarrow T_1) \rightarrow (T_2^{(\text{sc})} \rightarrow T_2) \rightarrow (T_3^{(\text{sc})} \rightarrow T_3) \rightarrow 0.$$

La suite (4.3.1) correspond alors à la suite exacte longue d'hypercohomologie (c.f. Proposition 3.1.1 (i)). On peut bien sûr faire de même avec les centres Z_i des groupes G_i .

Exemples 4.3.4.

- (1) Si G est un tore, alors $(T^{(\text{sc})} \rightarrow T) = (1 \rightarrow G)$, donc $H_{\text{ab}}^i(k, G) = H^i(k, G)$.
- (2) Si G^{ss} est simplement connexe, alors $\text{Ker}(\rho) = 1$, donc par le Corollaire 4.1.3.1, $\pi_1(\bar{G}) = \pi_1(\bar{G}^{\text{tor}})$. On trouve alors que $H_{\text{ab}}^i(k, G) = H_{\text{ab}}^i(k, G^{\text{tor}}) = H^i(k, G^{\text{tor}})$.
- (3) Si G est semi-simple, alors $T^{(\text{sc})} \rightarrow T$ est surjective et donc $(T^{(\text{sc})} \rightarrow T)$ est quasi-isomorphe à $(\text{Ker}(\rho) \rightarrow 1)$ (c.f. les Exemples 3.3.2 (1) et 3.5.3 (2)). On trouve alors $H_{\text{ab}}^i(k, G) = \mathbb{H}^i(k, T^{(\text{sc})} \rightarrow T) = \mathbb{H}^i(k, \text{Ker}(\rho) \rightarrow 1) = H^{i+1}(k, \text{Ker}(\rho))$ (c.f. la Proposition 3.1.1 (ii)).
- (4) Pour tout G , on a $H_{\text{ab}}^{-1}(k, G) = (\text{Ker}(\rho))(k)$. En effet, d'après l'Exemple 3.1.2 (1) on a $H_{\text{ab}}^{-1}(k, G) = \mathbb{H}^{-1}(k, T^{(\text{sc})} \xrightarrow{\rho} T) = (\text{Ker}(\rho))^\Gamma = (\text{Ker}(\rho))(k)$.

Proposition 4.3.5. *Soit G un k -groupe réductif connexe et $T \subset G$ un k -tore maximal. Alors on a les suites exactes longues*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{i-1}(k, G^{\text{tor}}) \rightarrow H^{i+1}(k, \text{Ker}(\rho)) \rightarrow H_{\text{ab}}^i(k, G) \rightarrow H^i(k, G^{\text{tor}}) \rightarrow H^{i+2}(k, \text{Ker}(\rho)) \rightarrow \dots, \\ \dots \rightarrow H_{\text{ab}}^{i-1}(k, G) \rightarrow H^i(k, T^{(\text{sc})}) \rightarrow H^i(k, T) \rightarrow H_{\text{ab}}^i(k, G) \rightarrow H^{i+1}(k, T^{(\text{sc})}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Démonstration. La première suite découle directement du Corollaire 4.3.3.2 appliqué à la suite $1 \rightarrow G^{\text{ss}} \rightarrow G \rightarrow G^{\text{tor}} \rightarrow 1$ et des Exemples 4.3.4 (1) et (3). La deuxième suite découle de la Proposition 4.3.2 appliquée à la suite $0 \rightarrow \pi_1(T^{(\text{sc})}) \rightarrow \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow 0$ (on rappelle que $\pi_1(S) = X_*(S)$ pour tout tore S) et de la Proposition 4.3.3 avec l'Exemple 4.3.4 (1). \square

4.4 Cohomologie galoisienne relative

Soient F, G des k -groupes. Un complexe $(F \xrightarrow{\alpha} G)$ est dit un module croisé de groupes algébriques sur k si α est un morphisme de k -groupes et si G agit sur F de façon que les équations (3.3.1), (3.3.2) et (3.3.3) soient vérifiées au niveau des \bar{k} -points.

Pour K/k une extension galoisienne finie, le groupe $\text{Gal}(K/k)$ agit sur le module croisé $(F(K) \rightarrow G(K))$. On pose alors, pour $i = -1, 0, 1$,

$$\mathbb{H}^i(K/k, F \rightarrow G) = \mathbb{H}^i(\text{Gal}(K/k), F(K) \rightarrow G(K)).$$

Définition 4.4.1. Pour $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ et $i = -1, 0, 1$ on pose

$$\mathbb{H}^i(k, F \rightarrow G) = \mathbb{H}^i(\Gamma, F \rightarrow G) = \varinjlim_K \mathbb{H}^i(K/k, F \rightarrow G),$$

où K parcourt les extensions galoisiennes finies de k dans \bar{k} .

Remarque.

On peut aussi définir $\mathbb{H}^i(k, F \rightarrow G)$ comme $\mathbb{H}_{\text{cont}}^i(\Gamma, F(\bar{k}) \rightarrow G(\bar{k}))$, où “cont” veut dire qu’on ne considère que les cocycles continus dans la définition des \mathbb{H}^i (c.f. Sections 3.2 et 3.4).

Soit maintenant G un k -groupe réductif connexe. On considère le complexe de k -groupes $(G^{\text{sc}} \xrightarrow{\rho} G)$. Si l’on note $Z, Z^{(\text{ss})}$ et $Z^{(\text{sc})}$ les centres de G, G^{ss} et G^{sc} respectivement, de l’égalité $G = ZG^{\text{ss}}$ on en tire facilement que $Z^{(\text{ss})} = Z \cap G^{\text{ss}}$ et donc $G^{\text{ad}} = (G^{\text{ss}})^{\text{ad}}$. Or, comme $\text{Ker}(\rho) \subset Z^{(\text{sc})}$, on trouve finalement $G^{\text{ad}} = (G^{\text{ss}})^{\text{ad}} = (G^{\text{sc}})^{\text{ad}}$.

On a alors un homomorphisme canonique

$$G \rightarrow G^{\text{ad}} = (G^{\text{sc}})^{\text{ad}} = \text{Int}(G^{\text{sc}}) \hookrightarrow \text{Aut}(G^{\text{sc}}),$$

qui nous donne une action de G sur G^{sc} .

Lemme 4.4.2. $(G^{\text{sc}} \xrightarrow{\rho} G)$ est un module croisé.

Démonstration. En effet, il suffit d’écrire les égalités évidentes suivantes. Pour $g \in G(\bar{k})$ et $h, h' \in G^{\text{sc}}(\bar{k})$,

$$\begin{aligned} hh'h^{-1} &= \rho^{(h)}h', \\ \rho^{(g)h} &= g\rho(h)g^{-1}. \end{aligned}$$

□

On définit la cohomologie galoisienne relative de G par rapport à G^{sc} comme

$$H_{\text{rel}}^i(k, G) = \mathbb{H}^i(k, G^{\text{sc}} \rightarrow G), \quad i = -1, 0, 1.$$

A tout morphisme $\beta : G_1 \rightarrow G_2$ on peut lui associer le morphisme de modules croisés $(G_1^{\text{sc}} \rightarrow G_1) \rightarrow (G_2^{\text{sc}} \rightarrow G_2)$. On trouve alors que $G \mapsto H_{\text{rel}}^i(k, G)$ est un foncteur de la catégorie des k -groupes réductifs connexes dans les catégories : Groupes abéliens pour $i = -1$, groupes pour $i = 0$ et ensembles pointés pour $i = 1$.

En regardant les définitions des groupes $H_{\text{rel}}^i(k, G)$ et $H_{\text{ab}}^i(k, G)$ pour $i = -1, 0, 1$, on peut voir qu’ils sont fortement liés. Regardons plus explicitement cette relation.

Lemme 4.4.3. Soit $T \subset G$ un k -tore maximal et Z le centre de G . Alors toutes les flèches dans le diagramme commutatif de modules croisés

$$\begin{array}{ccc} (Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z) & \hookrightarrow & (T^{(\text{sc})} \rightarrow T) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & (G^{\text{sc}} \rightarrow G) \end{array}$$

sont des quasi-isomorphismes.

Démonstration. On a déjà montré ceci pendant la preuve du Lemme 4.1.1. □

Du Lemme 4.4.3 et du Théorème 3.5.4 on obtient, pour $i = -1, 0, 1$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^i(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H}^i(k, T^{(\text{sc})} \rightarrow T) \\ & \searrow \sim & \downarrow \sim \\ H_{\text{rel}}^i(k, G) & \xlongequal{\quad} & \mathbb{H}^i(k, G^{\text{sc}} \rightarrow G) \end{array} \quad (4.4.1)$$

où toutes les flèches sont des isomorphismes (dans les catégories correspondantes).

Les groupes $Z^{(\text{sc})}, Z, T^{(\text{sc})}, T$ étant abéliens, les ensembles $\mathbb{H}^i(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z), \mathbb{H}^i(k, T^{(\text{sc})} \rightarrow T)$ ont des structures canoniques de groupes abéliens. Ceci nous permet dans le cas $i = 1$, de munir $H_{\text{rel}}^1(k, G)$ de la structure de groupe abélien induite par ces isomorphismes. Clairement cette structure ne dépend pas du choix du tore T .

Cette structure de groupe abélien sur $H_{\text{rel}}^1(k, G)$ est en plus fonctorielle. En effet, il suffit de noter qu'elle vient de la composition $G \mapsto (Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z) \mapsto \mathbb{H}^1(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z) \cong H_{\text{rel}}^1(k, G)$ et que $G \mapsto (Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z)$ est un foncteur.

En considérant cette structure et la définition des groupes $H_{\text{ab}}^i(k, G)$ (c.f. Définition 4.2.1), le diagramme (4.4.1) nous donne, pour $i = -1, 0, 1$, les isomorphismes de groupes $H_{\text{rel}}^i(k, G) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ab}}^i(k, G)$. On voit facilement qu'il s'agit en fait d'isomorphismes de foncteurs. On peut alors identifier les groupes $H_{\text{rel}}^i(k, G)$ et $H_{\text{ab}}^i(k, G)$ pour $i = -1, 0, 1$ dorénavant.

4.5 Les applications d'abélianisation ab^0 et ab^1

Dans cette section on donne les définitions et quelques propriétés et exemples des applications ab^0 et ab^1 définis par Borovoi. Pour les démonstrations de ces résultats et plus de détails, voir [Bo2, 3.9-3.17].

Considérons le morphisme de modules croisés $(1 \rightarrow G) \rightarrow (G^{\text{sc}} \rightarrow G)$. Ce morphisme induit les applications d'abélianisation pour $i = 0, 1$,

$$\text{ab}^i : H^i(k, G) = \mathbb{H}^i(k, 1 \rightarrow G) \rightarrow \mathbb{H}^i(k, G^{\text{sc}} \rightarrow G) = H_{\text{ab}}^i(k, G).$$

L'application $\text{ab}^0 : G(k) = H^0(k, G) \rightarrow H_{\text{ab}}^0(k, G)$ est un homomorphisme. L'application $\text{ab}^1 : H^1(k, G) \rightarrow H_{\text{ab}}^1(k, G)$ est un morphisme d'ensembles pointés. D'après le Corollaire 3.5.2.1, on a la suite exacte

$$1 \rightarrow (\text{Ker}(\rho))(k) \rightarrow G^{\text{sc}}(k) \xrightarrow{\rho} G(k) \xrightarrow{\text{ab}^0} H_{\text{ab}}^0(k, G) \rightarrow H^1(k, G^{\text{sc}}) \xrightarrow{\rho^*} H^1(k, G) \xrightarrow{\text{ab}^1} H_{\text{ab}}^1(k, G). \quad (4.5.1)$$

Proposition 4.5.1. *Les applications $\text{ab}^i : H^i(k, G) \rightarrow H_{\text{ab}}^i(k, G)$ sont des morphismes de foncteurs.*

Proposition 4.5.2. (i) *Soit $1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 1$ une suite exacte de k -groupes réductifs connexes. Alors on a le diagramme commutatif à lignes exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & G_1(k) & \longrightarrow & G_2(k) & \longrightarrow & G_3(k) & \xrightarrow{\delta^0} & H^1(k, G_1) & \longrightarrow & H^1(k, G_2) & \longrightarrow & H^1(k, G_3) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H_{\text{ab}}^0(k, G_1) & \longrightarrow & H_{\text{ab}}^0(k, G_2) & \longrightarrow & H_{\text{ab}}^0(k, G_3) & \xrightarrow{\delta^0} & H_{\text{ab}}^1(k, G_1) & \longrightarrow & H_{\text{ab}}^1(k, G_2) & \longrightarrow & H_{\text{ab}}^1(k, G_3). \end{array}$$

(ii) Supposons en plus que G_1 est abélien et pas nécessairement connexe. Alors on a le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & \longrightarrow & G_1(k) & \longrightarrow & G_2(k) & \longrightarrow & G_3(k) & \xrightarrow{\delta^0} & H^1(k, G_1) & \longrightarrow & H^1(k, G_2) & \longrightarrow & H^1(k, G_3) & \xrightarrow{\delta^1} & H^2(k, G_1) \\
& & \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim \\
& & G_1(k) & \longrightarrow & H_{\text{ab}}^0(k, G_2) & \longrightarrow & H_{\text{ab}}^0(k, G_3) & \xrightarrow{\delta^0} & H^1(k, G_1) & \longrightarrow & H_{\text{ab}}^1(k, G_2) & \longrightarrow & H_{\text{ab}}^1(k, G_3) & \xrightarrow{\delta^1} & H^2(k, G_1).
\end{array}$$

On décrit maintenant les applications ab^i , $i = 0, 1$, en termes des cocycles.

$i = 0$: Soit $g \in G(k)$. Comme $G = G^{\text{ss}}Z = \rho(G^{\text{sc}})Z$, il existe $g' \in Z(\bar{k})$, $f \in G^{\text{sc}}(\bar{k})$ tels que $g = \rho(f)g'$. On a alors $\text{ab}^0(g) = \text{Cl}(\varphi', g') \in \mathbb{H}^0(Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z)$, où

$$\varphi'_\sigma = f^{-1\sigma} f.$$

$i = 1$: Soit $\xi = \text{Cl}(\psi) \in H^1(k, G)$. On écrit $\psi_\sigma = \rho(\psi'_\sigma)z_\sigma$ où $\psi' : \Gamma \rightarrow G^{\text{sc}}(\bar{k})$ et $z : \Gamma \rightarrow Z(\bar{k})$ sont des applications continues. On a alors $\text{ab}^1(\xi) = \text{Cl}(\lambda, z) \in \mathbb{H}^1(Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z)$, où

$$\lambda_{\sigma, \tau} = \psi'_\sigma{}^\sigma \psi'_\tau \psi'_{\sigma\tau}{}^{-1}.$$

Exemples 4.5.3.

On prend toujours $i = 0, 1$.

- (1) Si G est un tore, alors $G^{\text{sc}} = 1$, $H_{\text{ab}}^i(k, G) = H^i(k, G)$ et ab^i est l'identité.
- (2) Si G^{ss} est simplement connexe, alors $H_{\text{ab}}^i(k, G) = H^i(k, G^{\text{tor}})$ (c.f. Exemple 4.3.4 (2)). Dans ce cas ab^i correspond à l'application $t_* : H^i(k, G) \rightarrow H^i(k, G^{\text{tor}})$ induite par la projection canonique $G \rightarrow G/G^{\text{ss}} = G^{\text{tor}}$.
- (3) Si G est semi-simple, alors $H_{\text{ab}}^i(k, G) = H^{i+1}(k, \text{Ker}(\rho))$ (c.f. Exemple 4.3.4 (3)). Dans ce cas les ab^i coïncident avec les applications $\delta^i : H^i(k, G) \rightarrow H^{i+1}(k, \text{Ker}(\rho))$ induites par la suite exacte $1 \rightarrow \text{Ker}(\rho) \rightarrow G^{\text{sc}} \rightarrow G \rightarrow 1$. Ceci peut se voir directement de la description des ab^i en termes des cocycles et des descriptions de δ^0 et δ^1 dans les Sections 2.4 et 2.8 respectivement.

(4) Pour G réductif connexe, on a le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & G^{\text{ss}} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G^{\text{tor}} & \longrightarrow & 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & (G^{\text{sc}} \rightarrow G^{\text{ss}}) & \longrightarrow & (G^{\text{sc}} \rightarrow G) & \longrightarrow & (1 \rightarrow G^{\text{tor}}) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

d'où on en tire, en utilisant les exemples précédents, le diagramme commutatif (toujours à lignes exactes)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
G^{\text{ss}}(k) & \longrightarrow & G(k) & \longrightarrow & G^{\text{tor}}(k) & \longrightarrow & H^1(k, G^{\text{ss}}) & \longrightarrow & H^1(k, G) & \longrightarrow & H^1(k, G^{\text{tor}}) \\
\downarrow \delta^0 & & \downarrow \text{ab}^0 & & \parallel & & \downarrow \delta^1 & & \downarrow \text{ab}^1 & & \parallel \\
H^1(k, \text{Ker}(\rho)) & \longrightarrow & H_{\text{ab}}^0(k, G) & \longrightarrow & G^{\text{tor}}(k) & \longrightarrow & H^2(k, \text{Ker}(\rho)) & \longrightarrow & H_{\text{ab}}^1(k, G) & \longrightarrow & H^1(k, G^{\text{tor}}).
\end{array}$$

Finalement, on regarde la torsion par un cocycle. Pour $\psi \in Z^1(k, G)$, on considère le k -groupe tordu ${}_\psi G$. On sait déjà (d'après le Corollaire 4.3.3.1) que $H_{\text{ab}}^i(k, {}_\psi G) = H_{\text{ab}}^i(k, G)$ et aussi que l'on a une application canonique (c.f. Section 2.3)

$$\tau_\psi : H^1(k, {}_\psi G) \rightarrow H^1(k, G), \text{Cl}(\psi') \rightarrow \text{Cl}(\psi'\psi).$$

On peut en faire de même pour l'hypercohomologie. En effet, on a une application canonique

$$\tau_\psi : \mathbb{H}^1(k, {}_\psi G^{\text{sc}} \rightarrow {}_\psi G) \rightarrow \mathbb{H}^1(k, G^{\text{sc}} \rightarrow G), \text{Cl}(h', \psi') \rightarrow \text{Cl}(h', \psi'\psi),$$

c.f. [Bo3, 2.14]. On note que $G^{\text{ad}} = (G^{\text{sc}})^{\text{ad}}$, donc la torsion de G^{sc} par ψ a bien un sens.

Proposition 4.5.4. Pour $\psi \in Z^1(k, G)$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, {}_\psi G) & \xrightarrow{\tau_\psi} & H^1(k, G) \\ \text{ab}^1 \downarrow & & \downarrow \text{ab}^1 \\ H_{\text{ab}}^1(k, {}_\psi G) = H_{\text{ab}}^1(k, G) & \xrightarrow{x \mapsto x + a(\psi)} & H_{\text{ab}}^1(k, G) \end{array}$$

où $a(\psi) = \text{ab}^1(\text{Cl}(\psi))$.

Ceci nous permet de calculer les fibres de ab^1 .

Corollaire 4.5.4.1. Soit $\xi = \text{Cl}(\psi) \in H^1(k, G)$. Notons ${}_\psi \rho : {}_\psi G^{\text{sc}} \rightarrow {}_\psi G$ le tordu de ρ . Alors :

- (i) $\text{Ker}(\text{ab}^1) = \rho_* H^1(k, G^{\text{sc}}) \cong H_{\text{ab}}^0(k, G) \setminus H^1(k, G^{\text{sc}})$.
- (ii) $(\text{ab}^1)^{-1}(\text{ab}^1(\xi)) = \tau_\psi({}_\psi \rho_* H^1(k, {}_\psi G^{\text{sc}})) \cong H_{\text{ab}}^0(k, G) \setminus H^1(k, {}_\psi G^{\text{sc}})$.

Démonstration. La première égalité découle de la suite (4.5.1) et du Corollaire 3.5.2.1 (ii). La deuxième égalité découle directement de la première après torsion. \square

4.6 k -liens

Pour définir ab^2 , il nous faut d'abord définir la 2-cohomologie galoisienne non abélienne. Pour cela, on aura besoin des k -liens. On verra dans cette section qu'un k -lien n'est qu'un type de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -lien au sens de la Définition 2.5.1.

Soit \bar{G} un groupe algébrique sur \bar{k} . On note $p : \bar{G} \rightarrow \text{Spec}(\bar{k})$ son morphisme structural, $m : \bar{G} \times_{\text{Spec}(\bar{k})} \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ le morphisme de multiplication et $i : \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ le morphisme d'inversion (c.f. [Hu, 7.1]). Pour $\sigma \in \Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$, on note $\sigma_{\mathfrak{h}} : \text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow \text{Spec}(\bar{k})$ l'automorphisme induit par σ^{-1} . On voit facilement qu'on a $(\sigma\tau)_{\mathfrak{h}} = \sigma_{\mathfrak{h}}\tau_{\mathfrak{h}}$ pour $\sigma, \tau \in \Gamma$.

Soit $\sigma \in \Gamma$. Un morphisme de k -schémas $s : \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ est un *automorphisme σ -semi-algébrique* de \bar{G} si s est inversible, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} & \xrightarrow{s} & \bar{G} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \text{Spec}(\bar{k}) & \xrightarrow{\sigma_{\mathfrak{h}}} & \text{Spec}(\bar{k}) \end{array} \quad (4.6.1)$$

commute, et la paire $(s, \sigma_{\mathfrak{h}})$ respecte la structure de groupe dans le sens suivant : Soit $p_i : \bar{G} \times \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ la i -ème projection. Les compositions $s \circ p_i : \bar{G} \times_{\bar{k}} \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ sont des morphismes de \bar{k} -schémas lorsque l'on prend $\sigma_{\mathfrak{h}} \circ p \circ p_i$ comme morphisme structural de $\bar{G} \times_{\bar{k}} \bar{G}$. Ceci induit un morphisme $\lambda_{s, \sigma} : \bar{G} \times_{\bar{k}} \bar{G} \rightarrow \bar{G} \times_{\bar{k}} \bar{G}$. On demande alors que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} \times_{\bar{k}} \bar{G} & \xrightarrow{\lambda_{s, \sigma}} & \bar{G} \times_{\bar{k}} \bar{G} \\ m \downarrow & & \downarrow m \\ \bar{G} & \xrightarrow{s} & \bar{G} \end{array}$$

soit commutatif.

Soit maintenant s un automorphisme σ -semi-algébrique et t un automorphisme τ -semi-algébrique de \bar{G} , où $\sigma, \tau \in \Gamma$. On vérifie facilement que $s \circ t$ est un automorphisme $\sigma\tau$ -semi-algébrique et s^{-1} un automorphisme σ^{-1} -semi-algébrique. En plus, un automorphisme

σ -semi-algébrique détermine σ de façon unique. En effet, s^{-1} induit un k -automorphisme de l'algèbre de fonctions $\bar{k}[\bar{G}]$, et σ est la restriction à \bar{k} de cet automorphisme. On écrit alors $\sigma = \gamma(s)$ et on a clairement $\gamma(s \circ t) = \gamma(s)\gamma(t)$ pour s, t comme tout à l'heure.

Un \bar{k} -automorphisme (de groupes algébriques) de \bar{G} est clairement un automorphisme $\text{id}_{\bar{k}}$ -semi-algébrique de \bar{G} . En sens inverse, un automorphisme σ -semi-algébrique est un automorphisme seulement si $\sigma = \text{id}_{\bar{k}}$, car sinon s n'est pas un \bar{k} -morphisme (sauf si $k = \bar{k}$, mais ce n'est pas un cas très intéressant).

On définit le groupe $\text{SAut}(\bar{G})$ des automorphismes semi-algébriques de \bar{G} sur k comme le groupe des morphismes $s : \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ qui sont des automorphismes σ -semi-algébriques pour certain $\sigma \in \Gamma$. D'après ce qu'on vient de faire, on voit qu'il s'agit bien d'un groupe, et en plus $\gamma : \text{SAut}(\bar{G}) \rightarrow \Gamma$ est un morphisme de groupes. Le noyau de ce morphisme est clairement l'ensemble des automorphismes $\text{id}_{\bar{k}}$ -semi-algébriques, i.e. le groupe $\text{Aut}(\bar{G})$ des \bar{k} -automorphismes de \bar{G} . On a alors une suite exacte

$$1 \rightarrow \text{Aut}(\bar{G}) \rightarrow \text{SAut}(\bar{G}) \xrightarrow{\gamma} \Gamma. \quad (4.6.2)$$

Soit \bar{Z} le centre de \bar{G} . On sait que $\text{Int}(\bar{G}) = \bar{G}(\bar{k})/\bar{Z}(\bar{k})$ est distingué dans $\text{Aut}(\bar{G})$. Il se trouve qu'il l'est aussi dans $\text{SAut}(\bar{G})$. En effet, on vérifie facilement que pour $s \in \text{SAut}(\bar{G})$ et $g \in \bar{G}(\bar{k})$ (i.e. $g : \text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow \bar{G}$), on a $s \circ \text{int}(g) \circ s^{-1} = \text{int}(s(g))$, où $s(g) = s \circ g \circ \gamma(s)^{-1}$. On pose alors

$$\begin{aligned} \text{Out}(\bar{G}) &= \text{Aut}(\bar{G})/\text{Int}(\bar{G}), \\ \text{SOut}(\bar{G}) &= \text{SAut}(\bar{G})/\text{Int}(\bar{G}). \end{aligned}$$

La suite (4.6.2) induit alors la suite exacte :

$$1 \rightarrow \text{Out}(\bar{G}) \rightarrow \text{SOut}(\bar{G}) \xrightarrow{q} \Gamma. \quad (4.6.3)$$

Définition 4.6.1. Soit \bar{G} un \bar{k} -group algébrique linéaire. Un k -lien est une paire $L = (\bar{G}, \kappa)$ où \bar{G} est un \bar{k} -groupe et $\kappa : \Gamma \rightarrow \text{SOut}(\bar{G})$ est un homomorphisme tel que

- (i) κ scinde la suite (4.6.3), i.e. $q \circ \kappa$ est l'identité de Γ ,
- (ii) Il existe une application continue $f : \Gamma \rightarrow \text{SAut}(\bar{G})$ relevant κ . Ici continue veut dire que pour tout $a \in \bar{k}[\bar{G}]$, l'application

$$\Gamma \rightarrow \bar{k}[\bar{G}], \sigma \mapsto f_{\sigma}^*(a),$$

est localement constante.

Remarque.

La formule $s(g) = s \circ g \circ \gamma(s)^{-1}$ pour $s \in \text{SAut}(\bar{G})$ et $g \in \bar{G}(\bar{k})$ définit en fait une action de $\text{SAut}(\bar{G})$ sur $\bar{G}(\bar{k})$ qui respecte la loi de groupe, i.e. on a un morphisme $\text{SAut}(\bar{G}) \rightarrow \text{Aut}(\bar{G}(\bar{k}))$, donc aussi un morphisme $\text{SOut}(\bar{G}) \rightarrow \text{Out}(\bar{G}(\bar{k}))$. On peut montrer (c.f. [FSS, Proposition 1.7]) que la continuité de f dans la Définition 4.6.1 implique que pour tout $g \in \bar{G}(\bar{k})$, l'application

$$\Gamma \rightarrow \bar{G}(\bar{k}), \sigma \mapsto f_{\sigma}(g),$$

est localement constante, i.e. $\Gamma \rightarrow \text{Aut}(\bar{G}(\bar{k}))$ est continue lorsque $\text{Aut}(\bar{G}(\bar{k}))$ est muni de la topologie faible par rapport aux applications d'évaluation (c.f. [FSS, 1.6]).

Ainsi, on trouve qu'un k -lien $L = (\bar{G}, \kappa)$ est en particulier un Γ -lien sur $\bar{G}(\bar{k})$ pour la Définition 2.5.1. On pourra alors appliquer tous les résultats de la Partie 2.

Soit G un k -groupe. On écrit $\bar{G} = G_{\bar{k}} = G \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(\bar{k})$. Pour $\sigma \in \Gamma$, on pose

$$\sigma_* = \text{id}_G \times_k \sigma_{\natural} : \bar{G} \rightarrow \bar{G}.$$

On voit que σ_* est un automorphisme σ -semi-algébrique. En plus, si s est un autre automorphisme σ -semi-algébrique, alors on a $s' = s \circ \sigma_*^{-1} \in \text{Aut}(\bar{G})$, donc tout automorphisme σ -semi-algébrique s'écrit $s' \circ \sigma_*$ avec $s' \in \text{Aut}(\bar{G})$. On a clairement $(\sigma\tau)_* = \sigma_* \circ \tau_*$ pour $\sigma, \tau \in \Gamma$. On a trouvé alors un morphisme continu

$$f_G : \Gamma \rightarrow \text{SAut}(\bar{G}), \sigma \mapsto \sigma_*,$$

qui scinde la suite exacte (4.6.2). En composant f_G avec la projection $\text{SAut}(\bar{G}) \rightarrow \text{SOut}(\bar{G})$ on trouve un morphisme

$$\kappa_G : \Gamma \rightarrow \text{SOut}(\bar{G}), \sigma \mapsto \sigma_* \pmod{\text{Int}(\bar{G})},$$

qui scinde la suite (4.6.3), i.e. on a un k -lien $L_G = (\bar{G}, \kappa_G)$ qui est trivial au sens de la Définition 2.5.1, car $f_G : \text{SAut}(\bar{G}) \rightarrow \text{Aut}(\bar{G}(\bar{k}))$ est un morphisme d'après la Remarque plus en haut.

En sens inverse, pour un k -lien trivial $L = (\bar{G}, \kappa)$, i.e. pour un morphisme $f : \Gamma \rightarrow \text{SAut}(\bar{G})$ scindant la suite (4.6.2), on a une k -forme G de \bar{G} définie par

$$G = \text{Spec}(\bar{k}[\bar{G}]^\Gamma),$$

où Γ agit sur $\bar{k}[\bar{G}]$ via f . On pourra regarder [Se2, Chapitre V-20, Proposition 12] pour une preuve de ce résultat. En particulier, lorsque $L = (\bar{G}, \kappa)$ avec \bar{G} abélien, on a toujours une k -forme G de \bar{G} , car κ est trivial d'après l'Exemple 2.5.2 (2).

Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien et soit \bar{Z} le centre de \bar{G} . De la même façon que dans la Section 2.6, on a un morphisme canonique $\text{SAut}(\bar{G}) \rightarrow \text{SAut}(\bar{Z}) = \text{SOut}(\bar{Z})$ qui est trivial sur les automorphismes intérieurs. En composant avec κ on trouve un k -lien sur \bar{Z} que l'on note encore κ . C'est un k -lien trivial, donc il définit une k -forme Z de \bar{Z} . On appelle Z le *centre* de L . Notons que si $L = (G_{\bar{k}}, \kappa_G)$ pour un k -groupe G , alors Z coïncide avec le centre de G .

4.7 2-cohomologie galoisienne non abélienne

Dans cette section on traduit partiellement ce qu'on a fait dans la Partie 2 dans le langage de la cohomologie galoisienne. On garde les notations de la section précédente.

Définition 4.7.1. Pour $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien, on pose

$$\begin{aligned} H^2(k, L) &= H^2(k, \bar{G}, \kappa) := H^2(\Gamma, \bar{G}(\bar{k}), \kappa), \\ Z^2(k, L) &= Z^2(k, \bar{G}, \kappa) := Z^2(\Gamma, \bar{G}(\bar{k}), \kappa), \\ N^2(k, L) &= N^2(k, \bar{G}, \kappa) := N^2(\Gamma, \bar{G}(\bar{k}), \kappa). \end{aligned}$$

Remarque.

Comme le morphisme $\kappa : \Gamma \rightarrow \text{Out}(\bar{G}(\bar{k}))$ se factorise par $\text{SOut}(\bar{G})$, on voit que pour un cocycle $(f, g) \in Z^2(k, L)$, $f \pmod{\text{Int}(\bar{G})} = \kappa$ implique que f est à valeurs dans $\text{SAut}(\bar{G})$.

Reprenons la remarque à la fin de la Section 2.7. Soit \bar{k}' une autre clôture algébrique de k et écrivons $\Gamma' = \text{Gal}(\bar{k}'/k)$. Pour un k -groupe G on a alors le Γ -lien $L_G = (G_{\bar{k}}, \kappa_G)$ et le Γ' -lien $L'_G = (G_{\bar{k}'}, \kappa'_G)$, tous les deux triviaux. Soit $\varphi : \bar{k}' \rightarrow \bar{k}$ un isomorphisme. Il induit des isomorphismes $\lambda_\varphi : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ et $\mu_\varphi : G(\bar{k}) \rightarrow G(\bar{k}')$. On a clairement $\mu_\varphi(\lambda_\varphi(\sigma')_*(g)) = \sigma'_*(\mu_\varphi(g))$ pour $\sigma' \in \Gamma'$ et $g \in G(\bar{k})$, donc μ_φ est un morphisme de κ_G dans κ'_G compatible avec λ_φ . D'après la Proposition 2.7.1 et la surjectivité de μ_φ , on a une application

$$(\lambda_\varphi, \mu_\varphi)_*^2 : H^2(\Gamma, G_{\bar{k}}, \kappa_G) \rightarrow H^2(\Gamma', G_{\bar{k}'}, \kappa'_G).$$

Lemme 4.7.2. $(\lambda_\varphi, \mu_\varphi)_*$ est une bijection indépendante de φ .

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat lorsque $\bar{k}' = \bar{k}$ et $\varphi \in \text{Aut}_k(\bar{k}) = \Gamma$. Dans ce cas, on a $\lambda_\varphi(\sigma) = \varphi^{-1}\sigma\varphi$ et $\mu_\varphi(g) = \varphi_*(g) = (f_G)_\varphi(g)$. Le résultat découle alors de la Proposition 2.7.3. \square

D'après le Lemme 4.7.2, pour un k -groupe G on peut identifier les ensembles $H^2(\Gamma, L_G)$ et $H^2(\Gamma', L'_G)$. On se permet alors d'écrire $H^2(k, G) := H^2(k, L_G)$.

Remarque.

Lorsque G est abélien, notre $H^2(k, G)$ coïncide avec le $H^2(k, G)$ abélien classique.

Soit \bar{G} un \bar{k} -groupe et G une k -forme de \bar{G} . Le k -lien $L_G = (\bar{G}, \kappa_G)$ a alors un élément neutre. En effet, on voit que $(f_G, 1) \in Z^2(k, \bar{G}, \kappa_G)$, où f_G est le morphisme défini dans la section précédente. Ecrivons

$$n(G) = \text{Cl}(f_G, 1) \in H^2(k, \bar{G}, \kappa_G).$$

On appelle $n(G)$ la classe neutre de cohomologie définie par la k -forme G de \bar{G} .

Soit $\psi \in Z^1(k, G^{\text{ad}})$ un cocycle, l'action de Γ sur $G^{\text{ad}}(\bar{k})$ étant induite par la composition $\Gamma \xrightarrow{f_G} \text{SAut}(\bar{G}) \rightarrow \text{Aut}(G(\bar{k})) \rightarrow \text{Aut}(G^{\text{ad}}(\bar{k}))$. On considère le groupe tordu $G' = {}_\psi G$ (c.f. l'Exemple 2.3.2). Ce groupe est aussi une k -forme de \bar{G} , donc il induit un morphisme

$$f_{G'} : \Gamma \rightarrow \text{SAut}(\bar{G}),$$

décrivant l'action de Γ sur ${}_\psi G$. En notant que $G^{\text{ad}}(\bar{k}) = \text{Int}(\bar{G})$, on voit que $(f_{G'})_\sigma = \psi_\sigma \circ (f_G)_\sigma$ pour $\sigma \in \Gamma$, donc $f_{G'} \equiv f_G \pmod{\text{Int}(G)}$. Alors la classe neutre de cohomologie $n(G')$ appartient à $H^2(k, \bar{G}, \kappa_G) = H^2(k, G)$.

Supposons que ψ vient d'un élément $\varphi \in Z^1(k, G)$. On voit facilement que dans ce cas $(f_{G'}, 1) = \varphi \cdot (f_G, 1)$ et alors

$$n(G') = \text{Cl}(f_{G'}, 1) = \text{Cl}(f_G, 1) = n(G).$$

Lemme 4.7.3. Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien et $\eta \in N^2(k, L)$ une classe neutre. Alors $\eta = n(G)$ pour une certaine k -forme G de \bar{G} . Cette k -forme est unique à torsion près par un cocycle $\varphi \in Z^1(k, G)$.

Démonstration. Il suffit d'écrire $\eta = \text{Cl}(f, 1)$ et noter que $f : \Gamma \rightarrow \text{SAut}(\bar{G})$ est alors un morphisme pour trouver une k -forme G de \bar{G} (c.f. Section 4.6). On a clairement $\eta = n(G)$. Finalement, on note que $(f', 1) = \varphi \cdot (f, 1)$ si et seulement si $\varphi \in Z^1(k, G)$. En effet, pour $\sigma, \tau \in \Gamma$ on a l'égalité

$$1 = \varphi \cdot 1 = \varphi_{\sigma\tau} f_\sigma(\varphi_\tau)^{-1} \varphi_\sigma^{-1}.$$

On en déduit que $n(G') = n(G)$ si et seulement si $G' = {}_\varphi G$ avec $\varphi \in Z^1(k, G)$, ce qui conclut. \square

Le Corollaire 2.9.1.4 nous donne une caractérisation de $N^2(k, L_G)$.

Proposition 4.7.4. Soit G un k -groupe et Z son centre. Alors une classe $\eta \in H^2(k, G)$ est neutre si et seulement si

$$\eta - n(G) \in \text{Im}[\delta^1 : H^1(k, G/Z) \rightarrow H^2(k, Z)].$$

Démonstration. Il suffit de noter $n(G) = \text{Cl}(f_G, 1)$ et rappeler que κ_G est le k -lien trivial induit par f_G . Cela dit, l'énoncé est exactement celui du Corollaire 2.9.1.4. \square

4.8 Classes neutres et groupes réductifs

Dans cette section, on donne deux résultats qui vont nous permettre de définir l'application d'abélianisation ab^2 . Les résultats sont les suivants.

Proposition 4.8.1. *Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien réductif connexe. Alors $N^2(k, L) \neq \emptyset$.*

Soit maintenant $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien quelconque. Le sous-groupe \bar{G}^u est un sous-groupe caractéristique de \bar{G} . Notons $r : \bar{G} \rightarrow \bar{G}^{\text{red}} = \bar{G}/\bar{G}^u$. Alors le Corollaire 2.7.1.1 nous donne une application $r_*^2 : H^2(k, L) \rightarrow H^2(k, L^{\text{red}})$ vérifiant $r_*^2(N^2(k, L)) \subset N^2(k, L^{\text{red}})$, où $L^{\text{red}} = (\bar{G}^{\text{red}}, \kappa^{\text{red}})$ et κ^{red} est le k -lien induit par κ .

Proposition 4.8.2. *L'application r_*^2 induit une bijection entre $N^2(k, L)$ et $N^2(k, L^{\text{red}})$.*

Cette deuxième proposition a un corollaire immédiat.

Corollaire 4.8.2.1. *Soit (\bar{U}, κ) un k -lien unipotent. Alors $H^2(k, \bar{U}, \kappa) = N^2(k, \bar{U}, \kappa)$.*

Démonstration. En effet, un groupe unipotent est en particulier nilpotent (c.f. [Hu, 17.5]), donc résoluble. Ceci nous dit que $\bar{U}^u = \bar{U}^\circ$ et alors $\bar{U}^{\text{red}} = \bar{U}/\bar{U}^\circ$ est fini. Comme on est en caractéristique 0, un groupe unipotent ne peut pas avoir d'éléments d'ordre fini, donc $\bar{U}^{\text{red}} = 1$ et le résultat en découle. \square

Montrons d'abord la Proposition 4.8.2. Elle s'appuie sur l'équivalent abélien du Corollaire 4.8.2.1.

Lemme 4.8.3. *Soit U un k -groupe abélien unipotent. Alors $H^2(k, U) = 0$.*

Démonstration. Comme on est en caractéristique 0, U est isomorphe à un produit direct de copies du group additif \mathbb{G}_a (c.f. [Sp2, Theorem 3.4.7]). Or, on sait que $H^2(k, \mathbb{G}_a) = 0$ (c.f. Proposition 1.3.1), donc $H^2(k, U) = 0$. \square

Démonstration de la Proposition 4.8.2. On démontre le résultat par récurrence sur la dimension de \bar{G} . On peut supposer que $\bar{G}^u \neq 1$, sinon $r = \text{id}_{\bar{G}}$ et il n'y a rien à démontrer.

Soit \bar{A} le centre de \bar{G}^u . Comme \bar{G}^u est unipotent, on a $\dim \bar{A} > 0$ (c.f. [Hu, 17.4-17.5]). \bar{A} étant un sous-groupe caractéristique de \bar{G} , on peut appliquer le Corollaire 2.7.1.1 pour trouver un k -lien $L' = (\bar{G}/\bar{A}, \kappa')$ et une application $\nu : H^2(k, L) \rightarrow H^2(k, L')$ vérifiant $\nu(N^2(k, L)) \subset N^2(k, L')$. Par hypothèse de récurrence, on suppose que le résultat est vérifié pour L' .

Soit $\eta \in H^2(k, L)$ telle que $r_*^2(\eta) \in N^2(k, L^{\text{red}})$. Il s'agit de montrer que $\eta \in N^2(k, L)$. D'après notre hypothèse de récurrence, on a $\nu(\eta) \in N^2(k, L')$, car r_*^2 se factorise clairement par ν . Écrivons $\eta = \text{Cl}(f, g)$, $\nu(\eta) = \text{Cl}(f', g')$, où f' et g' sont les applications obtenues directement de f et g après projection. Comme $\nu(\eta)$ est neutre, on peut choisir le cocycle (f, g) de façon que $g' = 1$. Alors on peut regarder g comme une application $\Gamma \rightarrow \bar{A}(\bar{k})$. En composant f avec $\text{SAut}(\bar{G}) \rightarrow \text{SAut}(\bar{A})$, on peut regarder (f, g) comme un élément de $Z^2(k, \bar{A}, \kappa)$ où l'on note toujours κ le morphisme induit. \bar{A} étant abélien, le k -lien (\bar{A}, κ) est trivial et induit donc une k -forme A de \bar{A} . Alors $H^2(k, \bar{A}, \kappa) = H^2(k, A) = 0$ d'après le Lemme 4.8.3, donc $\text{Cl}(f, g) = 1$, i.e. il existe une fonction continue $c \in C^1(\Gamma, A(\bar{k}))$ telle que

$$c_{\sigma\tau} g_{\sigma,\tau} f_\sigma(c_\tau)^{-1} c_\sigma^{-1}.$$

Alors $c \cdot (f, g)$ est un cocycle neutre, donc $\eta = \text{Cl}(f, g)$ est une classe neutre, ce qui conclut. \square

Regardons maintenant la Proposition 4.8.1. Si \bar{G} est un \bar{k} -groupe réductif connexe, on peut montrer qu'il admet une k -forme déployée G (on utilise [Sp2, Theorem 9.6.2, Theorem 16.3.3]). Fixons $T \subset G$ un k -tore déployé maximal et $B \subset G$ un sous-groupe de Borel

contenant T . Le choix de T nous donne un système de racines $R(G, T)$ (resp. un système $R^\vee(G, T)$ de co-racines) et le choix de B nous donne une base Π de ce système (resp. Π^\vee pour $R^\vee(G, T)$). On note $\Psi = \Psi(G, B, T)$ ces données. Pour $\alpha \in R(G, T)$, soit $U_\alpha \subset B$ le sous-groupe unipotent à un paramètre correspondant à α (c.f. [BT, 2.3]). Choisissons un élément $u_\alpha \in U_\alpha(k)$ pour chaque $\alpha \in \Pi$. D'après [Sp3, Proposition 2.13, Corollary 2.14], on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \text{Int}(G) \rightarrow \text{Aut}(\bar{G}) \rightarrow \text{Aut}(\Psi(G, B, T)) \rightarrow 1, \quad (4.8.1)$$

et le choix des u_α définit un morphisme $s : \text{Aut}(\Psi) \rightarrow \text{Aut}(\bar{G})$ à valeurs dans $\text{Aut}_k(G)$ (le groupe des k -automorphismes de G) qui scinde la suite.

Γ agit sur les termes de la suite 4.8.1. On voit que le scindage s est Γ -équivariant, car Γ agit trivialement sur l'image de s et sur $\text{Aut}(\Psi)$ (car on a défini Ψ en partant d'un k -tore déployé). En particulier, on trouve un isomorphisme Γ -équivariant $\text{Out}(\bar{G}) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(\Psi)$.

Lemme 4.8.4. *On a une bijection canonique entre l'ensemble des k -liens $L = (\bar{G}, \kappa)$ pour \bar{G} fixé et l'ensemble des homomorphismes continus $\mu : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Psi)$.*

Démonstration. L'existence d'une k -forme G de \bar{G} nous donne un morphisme $f_G : \Gamma \rightarrow \text{SAut}(\bar{G})$ scindant la suite 4.6.2 (c.f. Section 4.6). Dans ce cas $\text{SOut}(\bar{G})$ devient un produit semi-direct de $\text{Out}(\bar{G})$ et Γ . Or, comme on a $\text{Out}(\bar{G}) \cong \text{Aut}(\Psi)$ et Γ agit trivialement sur $\text{Aut}(\Psi)$, on trouve l'isomorphisme

$$\text{Aut}(\Psi) \times \Gamma \xrightarrow{\sim} \text{SOut}(\bar{G}).$$

La donnée d'un k -lien (\bar{G}, κ) équivaut à se donner un morphisme continu $\kappa : \Gamma \rightarrow \text{SOut}(\bar{G})$ scindant la suite 4.6.3. La donnée du morphisme équivaut à la donnée des morphismes continus $\Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Psi)$ et $\Gamma \rightarrow \Gamma$. Et pour scinder la suite, il faut (et il suffit) que le deuxième soit l'identité. L'équivalence est alors claire. \square

Remarque.

On note que le morphisme $\Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Psi)$ correspondant au k -lien trivial induit par G est le morphisme trivial.

Démonstration de la Proposition 4.8.1. On préserve les notations du Lemme 4.8.4. Un k -lien $L = (\bar{G}, \kappa)$ définit un morphisme continu $\mu : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Psi)$ d'après ce lemme, donc un morphisme $\psi = s \circ \mu : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\bar{G})$, où s est le morphisme scindant la suite 4.8.1. L'action de Γ étant triviale sur l'image de s , on voit que ψ est un cocycle, car $\psi_{\sigma\tau} = \psi_\sigma\psi_\tau = \psi_\sigma^\sigma\psi_\tau$. Posons $G' = {}_\psi G$ (c.f. Proposition 2.3.1 (iv)). En identifiant $\text{SOut}(\bar{G})$ avec $\text{Aut}(\Psi) \times \Gamma$, on trouve $\kappa = \mu \times \text{id}_\Gamma$ et on sait d'après la dernière remarque que $f_G \equiv 1 \times \text{id}_\Gamma \pmod{\text{Int}(\bar{G})}$. D'autre part, on a $f_{G'} = \psi f_G$ (c.f. Section 4.7), ce qui nous donne

$$f_{G'} \equiv \mu \times \text{id}_\Gamma \equiv \kappa \pmod{\text{Int}(\bar{G})},$$

donc la classe neutre $n(G')$ est bien dans $H^2(k, L)$, ce qui conclut. \square

4.9 L'application d'abélianisation ab^2

On définit finalement $\text{ab}^2 : H^2(k, L) \rightarrow H_{\text{ab}}^2(k, L)$ pour L un k -lien connexe maintenant qu'on a tout ce qu'il nous faut. Cette application vérifie $\text{ab}^2(N^2(k, L)) = 0$.

D'abord, supposons que $L = (\bar{G}, \kappa)$ est en plus réductif. D'après la Proposition 4.8.1 on a une classe neutre $\eta \in H^2(k, L)$. Le Lemme 4.7.3 nous donne alors une k -forme G de \bar{G} . Soient G^{ss} , G^{sc} et $\rho : G^{\text{sc}} \rightarrow G$ comme dans les notations au début. Soient Z , $Z^{(\text{ss})}$ et $Z^{(\text{sc})}$ les centres de G , G^{ss} et G^{sc} respectivement.

Rappelons un peu ce qu'on a fait dans la Section 4.2. On considère l'homomorphisme

$$\rho : Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z,$$

induit par $\rho : G^{\text{sc}} \rightarrow G$. On regarde ce morphisme comme un complexe de k -groupes abéliens à deux éléments et on pose

$$H_{\text{ab}}^i(k, L) = H_{\text{ab}}^i(k, G) = \mathbb{H}^i(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z).$$

On s'intéresse à $H_{\text{ab}}^2(k, L)$. Considérons la suite exacte de complexes

$$1 \rightarrow (1 \rightarrow Z) \xrightarrow{j} (Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z) \rightarrow (Z^{(\text{sc})} \rightarrow 1) \rightarrow 1.$$

De la suite exacte longue d'hypercohomologie (c.f. Proposition 3.1.1 (i)), on en tire le morceau

$$\cdots \rightarrow \mathbb{H}^1(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow 1) \xrightarrow{\delta^1} \mathbb{H}^2(k, 1 \rightarrow Z) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{H}^2(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z) \rightarrow \cdots,$$

d'où on obtient

$$\cdots \rightarrow H^2(k, Z^{(\text{sc})}) \xrightarrow{\rho_*^2} H^2(k, Z) \xrightarrow{j_*^2} H_{\text{ab}}^2(k, L) \rightarrow \cdots. \quad (4.9.1)$$

On remarque que l'on a bien $\delta^1 = \rho_*^2$. Cela se voit en regardant la définition de δ^1 au moyen des cocycles.

Pour définir ab^2 , on utilise le morphisme j_*^2 et le lemme suivant.

Lemme 4.9.1. *Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien réductif connexe. Soient $\eta, \eta' \in N^2(k, L)$. Alors $j_*^2(\eta - \eta') = 0$.*

On rappelle que $\eta - \eta' \in H^2(k, Z)$ est l'élément qui emporte η' dans η à travers de l'action du groupe abélien $H^2(k, Z)$ sur $H^2(k, L)$, c.f. la Proposition 2.6.4.

Démonstration. D'après le Lemme 4.7.3, $\eta' = n(G)$ pour une certaine k -forme G de \bar{G} . La Proposition 4.7.4 nous dit alors que

$$\eta - \eta' \in \text{Im}[\delta^1 : H^1(k, G^{\text{ad}}) \rightarrow H^2(k, Z)].$$

On rappelle que $(G^{\text{sc}})^{\text{ad}} = G^{\text{sc}}/Z^{(\text{sc})} \cong G^{\text{ad}}$, d'où le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & Z^{(\text{sc})} & \longrightarrow & G^{\text{sc}} & \longrightarrow & G^{\text{ad}} \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G^{\text{ad}} \longrightarrow 1 \end{array}$$

qui nous donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, G^{\text{ad}}) & \xrightarrow{\delta'^1} & H^2(k, Z^{(\text{sc})}) \\ \parallel & & \downarrow \rho_*^2 \\ H^1(k, G^{\text{ad}}) & \xrightarrow{\delta^1} & H^2(k, Z). \end{array} \quad (4.9.2)$$

Ce diagramme nous dit que $\text{Im}(\delta^1) = \text{Im}(\rho_*^2 \circ \delta'^1)$, donc $\eta - \eta' \in \text{Im}(\rho_*^2)$. Alors par exactitude de la suite (4.9.1), on a $j_*^2(\eta - \eta') = 0$. \square

On passe maintenant à la définition. Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien réductif connexe. D'après la Proposition 4.8.1, $N^2(k, L) \neq \emptyset$.

Définition 4.9.2. Soit $\eta_0 \in N^2(k, L)$. On définit l'application $\text{ab}^2 : H^2(k, L) \rightarrow H_{\text{ab}}^2(k, L)$ par la formule

$$\text{ab}^2(\eta) = j_*^2(\eta - \eta_0) \in H_{\text{ab}}^2(k, L).$$

On remarque que d'après le Lemme 4.9.1, la définition de ab^2 ne dépend pas du choix de η_0 . En effet, si η_1 est une autre classe neutre, on a $j_*^2(\eta - \eta_1) = j_*^2((\eta - \eta_0)(\eta_0 - \eta_1)) = j_*^2(\eta - \eta_0)$. Ce lemme nous dit aussi que $\text{ab}^2(N^2(k, L)) = 0$ et que l'image de $H^2(k, L)$ par ab^2 est tout le groupe $j_*^2(H^2(k, Z))$, car pour $\eta_Z \in H^2(k, Z)$ on peut toujours prendre $\eta = \eta_Z \cdot \eta_0 \in H^2(k, L)$ et on a clairement $\text{ab}^2(\eta) = j_*^2(\eta_Z)$.

Définition 4.9.3. Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien connexe (pas nécessairement réductif). On définit

$$H_{\text{ab}}^2(k, L) = H_{\text{ab}}^2(k, L^{\text{red}}),$$

et on définit $\text{ab}^2 : H^2(k, L) \rightarrow H_{\text{ab}}^2(k, L)$ par la composition

$$\text{ab}^2 : H^2(k, L) \xrightarrow{r_*^2} H^2(k, L^{\text{red}}) \xrightarrow{\text{ab}^2} H_{\text{ab}}^2(k, L^{\text{red}}) = H_{\text{ab}}^2(k, L),$$

où r_*^2 est l'application définie dans la Section 4.8.

D'après la Proposition 4.8.2 et ce qu'on a dit sur ab^2 pour un groupe réductif, l'application ab^2 vérifie bien $\text{ab}^2(N^2(k, L)) = 0$.

Décrivons ab^2 au moyen des cocycles. On suppose L réductif, de façon que l'on ait $\bar{G} = \bar{G}^{\text{sc}} \bar{Z}$. Soit $\eta = \text{Cl}(f, g) \in H^2(k, L)$. Ecrivons

$$g_{\sigma, \tau} = \bar{\rho}(g'_{\sigma, \tau}) z_{\sigma, \tau},$$

où $g' : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \bar{G}^{\text{sc}}(\bar{k})$ et $z : \Gamma \times \Gamma \rightarrow Z(\bar{k})$ sont des applications continues. On pose

$$\chi_{\sigma, \tau, \nu} = g'_{\sigma, \tau}{}^{-1} g'_{\sigma \tau, \nu}{}^{-1} g'_{\sigma, \tau \nu} f_{\sigma}(\sigma g'_{\tau, \nu}).$$

On voit alors que $\chi_{\sigma, \tau, \nu} \in Z^{(\text{sc})}(\bar{k})$ et $(\chi, z) \in Z^2(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z)$. On a alors

$$\text{ab}^2(\eta) = \text{Cl}(\chi, z) \in \mathbb{H}^2(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z) = H_{\text{ab}}^2(k, L).$$

5 Quelques principes de Hasse

Dans cette partie, on analyse plus profondément les propriétés de l'application ab^2 dans le cas où k est un corps local ou un corps de nombres. On obtient en particulier un résultat du type principe de Hasse pour les classes neutres. On utilise ces résultats pour montrer d'autres principes de Hasse sur les espaces homogènes.

On garde les notations de la Partie 4. En particulier on rappelle que tous les groupes algébriques sont supposés linéaires.

5.1 Propriétés de ab^2

Dans cette section, on fixe k un corps local (pouvant être archimédien) ou un corps de nombres. Le résultat important de cette section est le théorème suivant.

Théorème 5.1.1. *Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien connexe. Alors une classe $\eta \in H^2(k, L)$ est neutre si et seulement si $\text{ab}^2(\eta) = 0$, i.e. $(\text{ab}^2)^{-1}(0) = N^2(k, L)$.*

On a un corollaire évident.

Corollaire 5.1.1.1. *Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien semi-simple et simplement connexe. Alors $H^2(k, L) = N^2(k, L)$.*

Démonstration. En effet, dans ce cas le morphisme $\bar{\rho} : \bar{G}^{\text{sc}} \rightarrow \bar{G}$ est l'identité, donc $Z^{(\text{sc})} = Z$ avec les notations de la Section 4.9. Alors le complexe $(Z^{(\text{sc})} \xrightarrow{\rho} Z)$ est exact, donc $H_{\text{ab}}^2(k, L) = \mathbb{H}^2(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z) = 0$ d'après la Proposition 3.1.1 (v), d'où le résultat en utilisant le Théorème 5.1.1. \square

Pour montrer le théorème, on donne d'abord un résultat général sur les tores. Soit k un corps de nombres et T un k -tore. On définit le deuxième groupe de Shafarevich-Tate III^2 comme

$$\text{III}^2(k, T) = \text{Ker} \left[\text{loc}^2 : H^2(k, T) \rightarrow \prod_{v \in \mathcal{V}} H^2(k_v, T) \right].$$

Un tore est dit *quasi-trivial* si son groupe de caractères $X^*(T_{\bar{k}})$ admet une base Γ -stable (Un tel module est appelé un *module de permutation*). On voit facilement qu'il l'est si et seulement s'il est un produit de tores de la forme $R_{K/k}\mathbb{G}_m$, où K/k est une extension finie (voir [PR, 2.1.2] pour la définition de $R_{K/k}G$ pour G un K -groupe).

Lemme 5.1.2. *Soit k un corps de nombres et soit T un k -tore. Supposons que au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) T est quasi-trivial ;
- (ii) T_{k_v} est k_v -anisotrope pour une certaine place v de k ;
- (iii) T est déployé sur une extension cyclique de k ;
- (iv) T est de dimension 1.

Alors $\text{III}^2(k, T) = 0$.

On rappelle qu'un k -tore T est k -anisotrope si $H^0(k, X^*(T)) = 0$.

Démonstration. Pour les cas (i) et (ii), voir [Sa, Lemme 1.9]. Pour le cas (iii), voir [Bo4, Lemma 3.4.1]. Montrons que (iv) \Rightarrow (iii) :

Un k -tore de dimension 1 est une k -forme du groupe \mathbb{G}_m . Or, on sait que les k -formes de \mathbb{G}_m sont en bijection avec l'ensemble $H^1(k, \text{Aut}(\mathbb{G}_m))$ (c.f. [Se1, Chapitre III, §1, Proposition 5]). Or, $\text{Aut}(\mathbb{G}_m)$ n'a que deux éléments, l'identité et l'inversion. Donc si $a \in Z^1(k, \text{Aut}(\mathbb{G}_m))$ est un cocycle représentant la classe correspondant à T , soit il est trivial, soit il est trivial sur un sous-groupe de Γ d'indice 2. Dans les deux cas on voit que T est déployé sur l'extension quadratique correspondant à ce dernier sous-groupe, ce qui conclut. \square

Pour montrer le Théorème 5.1.1, on utilise le lemme suivant.

Lemme 5.1.3. *Soit G un k -groupe semi-simple simplement connexe et soit Z son centre. L'application*

$$\delta^1 : H^1(k, G^{\text{ad}}) \rightarrow H^2(k, Z),$$

est surjective.

Démonstration. On démontre le lemme en le divisant en trois cas. Les démonstrations données ici se trouvent dans [PR, Chapter 6]. On utilise deux résultats montrés dans ce livre :

- (1) [PR, Lemma 6.18] Soit G comme dans l'énoncé et $k = \mathbb{R}$, alors il existe un k -tore maximal T de G tel que $H^2(k, T) = 1$.
- (2) [PR, Theorem 6.21] Soit G un groupe semi-simple et k un corps local non archimédien, alors il existe un k -tore maximal T qui est k -anisotrope.

Cas réel : Soit T un k -tore comme dans (1) et T' son image dans G^{ad} . On a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G^{\text{ad}} & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

ce qui nous donne le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, T') & \xrightarrow{\delta^1} & H^2(k, Z) \\ \downarrow & & \parallel \\ H^1(k, G^{\text{ad}}) & \xrightarrow{\delta^1} & H^2(k, Z). \end{array}$$

Il suffit alors de montrer la surjectivité de l'application $\delta^1 : H^1(k, T') \rightarrow H^2(k, Z)$. Or, cette surjectivité est claire d'après l'exactitude de la suite exacte longue de cohomologie abélienne et le fait que $H^2(k, T) = 1$.

Cas non archimédien : Soit T un k -tore maximal et k -anisotrope de G . Soit T' son image dans G^{ad} . Comme T est anisotrope, on a $H^0(k, T^\vee) = 1$. Alors par la dualité de Tate-Nakayama (c.f. Théorème 1.5.6), on a $H^2(k, T) = 1$, ce qui donne la surjectivité de δ^1 de la même façon que dans le cas réel.

Cas d'un corps de nombres : Soit $\eta \in H^2(k, Z)$. On montre d'abord que, pour presque toute place $v \in \mathcal{V}$ (voir les notations dans la page 5), l'image $\text{loc}_v^2(\eta) \in H^2(k_v, Z)$ est triviale. En effet, η appartient à l'image d'un morphisme d'inflation $H^2(K/k, Z) \rightarrow H^2(k, Z)$ pour une certaine extension finie K/k (si ψ représente η , il suffit de prendre le corps fixé par le sous-groupe de Γ où ψ est trivial). On sait que pour presque tout $v \in \mathcal{V}$, l'extension K_w/k_v est non ramifiée (où w est une extension de v à K). Alors $\text{loc}_v^2(\eta)$ appartient à l'image du morphisme d'inflation $H^2(k_v^{\text{nr}}/k_v, Z) \rightarrow H^2(k_v, Z)$, où k_v^{nr} est l'extension non ramifiée maximale. Mais on sait que $\text{Gal}(k_v^{\text{nr}}/k_v)$ est isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}(1)$, qui est un groupe de dimension cohomologique 1, et $Z(\bar{k})$ est fini, donc $H^2(k_v^{\text{nr}}/k_v, Z) = 1$ et $\text{loc}_v^2(\eta)$ est trivial.

Soit maintenant $S \subset \mathcal{V}$ un sous-ensemble fini contenant toutes les places telles que $\text{loc}_v^2(\eta) \neq 1$ et au moins une place non archimédienne. Pour chaque place non archimédienne $v \in S$, on choisit T_v un tore maximal k_v -anisotrope, donc tel que $H^2(k_v, T_v) = 1$. Pour les

places réelles on peut aussi choisir un tel tore d'après (1). La propriété d'approximation faible pour les variétés de tores (c.f. [PR, Proposition 7.3, Corollary 3]) nous dit alors qu'il existe un k -tore T dans G qui est isomorphe à T_v sur k_v pour $v \in S$. Soit T' l'image de T dans G^{ad} . Encore une fois il suffit de montrer que le morphisme $\delta^1 : H^1(k, T') \rightarrow H^2(k, Z)$ induit par la suite

$$1 \rightarrow Z \xrightarrow{i} T \xrightarrow{\rho} T' \rightarrow 1,$$

est surjectif.

On a le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} H^1(k, T') & \xrightarrow{\delta^1} & H^2(k, Z) & \xrightarrow{i_*^2} & H^2(k, T) \\ \text{loc}^1 \downarrow & & \text{loc}^2 \downarrow & & \text{loc}^2 \downarrow \\ \prod_{v \in \mathcal{V}} H^1(k_v, T') & \xrightarrow{\delta_v^1} & \prod_{v \in \mathcal{V}} H^2(k_v, Z) & \xrightarrow{(i_v)_*^2} & \prod_{v \in \mathcal{V}} H^2(k_v, T) \end{array}$$

Il suffit de montrer alors que $\eta \in \text{Ker}(i_*^2)$. On a bien $(i_{\mathcal{V}})_*^2(\text{loc}^2(\eta)) = 1$, car $H^2(k_v, T) = 1$ pour les $v \in S$, i.e. pour les v telles que $\text{loc}_v^2(\eta) \neq 1$. Alors $\text{loc}^2(i_*^2(\eta)) = 1$. Or, il existe un place non archimédienne v_0 dans S , donc T est k_{v_0} -anisotrope par construction. D'après le Lemme 5.1.2 (ii), on a $\text{III}^2(k, T) = 0$, donc $i_*^2(\eta) = 1$ et $\eta \in \text{Ker}(i_*^2)$, ce qui conclut la preuve. \square

Démonstration du Théorème 5.1.1. On sait déjà que $\text{ab}^2(N^2(k, L)) = 0$. Il s'agit alors de montrer que si $\text{ab}^2(\eta) = 0$, alors η est neutre. D'après la Proposition 4.8.2, on peut supposer que L est réductif.

Soit $\eta \in (\text{ab}^2)^{-1}(0)$. La Proposition 4.8.1 et le Lemme 4.7.3 nous disent qu'il existe une classe neutre $n(G) \in H^2(k, L)$ avec G une k -forme de \bar{G} . On a alors

$$j_*^2(\eta - n(G)) = \text{ab}^2(\eta) = 0,$$

d'où l'on obtient, par exactitude de la suite (4.9.1),

$$\eta - n(G) = \rho_*^2(\chi)$$

pour certain $\chi \in H^2(k, Z^{(\text{sc})})$. Le Lemme 5.1.3 nous dit qu'il existe une classe $\xi \in H^1(k, G^{\text{ad}})$ telle que $\chi = \delta'^1(\xi)$ avec les notations du diagramme (4.9.2). Le même diagramme nous dit alors que $\eta - n(G) = \delta^1(\xi)$ et donc, d'après la Proposition 4.7.4, η est neutre (en fait, $\eta = n(\psi G)$, où $\psi \in Z^1(k, G^{\text{ad}})$ est un cocycle représentant ξ). \square

Remarque.

Le Théorème 5.1.1 peut être obtenu à partir du Corollaire 5.1.1.1, montré par Douai (c.f. [Do1, Théorème 1.1] et [Do2, Proposition 4.1, Théorème 5.1]).

En effet, tout comme au début de cette section, pour un k -lien réductif connexe $L = (\bar{G}, \kappa)$ on a une k -forme G et son revêtement universel G^{sc} . On peut montrer que $(\text{Ker}(\rho))(\bar{k})$ est Γ -invariant, ce qui nous permet de définir par projection une action de Γ sur $G(\bar{k})$ qui se trouve être la même induite par la k -forme G , i.e. on a un morphisme de k -liens $L^{\text{sc}} \rightarrow L$ et une application canonique $\rho_*^2 : H^2(k, L^{\text{sc}}) \rightarrow H^2(k, L)$ qui emporte les classes neutres dans les classes neutres. Au moyen des cocycles, on peut identifier ce morphisme avec le morphisme $H^2(k, Z^{(\text{sc})}) \rightarrow H^2(k, Z)$ (on prend $\text{Cl}(f_{G^{\text{sc}}}, 1)$ comme l'élément distingué, c.f. la remarque à la fin de la Section 2.6). L'exactitude de la suite 4.9.1 nous dit alors que $\text{Ker}(\text{ab}^2) = \text{Im}(\rho_*^2)$.

Alors si $\text{ab}^2(\eta) = 0$, on a $\eta = \rho_*^2(\eta')$ pour certain $\eta' \in H^2(k, L^{\text{sc}})$. D'après le Corollaire 5.1.1.1, η' est neutre. Comme ρ_*^2 emporte les classes neutres dans les classes neutres, on a $\eta \in N^2(k, L)$, ce qui conclut.

Considérons maintenant le \bar{k} -tore $\bar{G}^{\text{tor}} = \bar{G}^{\text{red}}/\bar{G}^{\text{ss}}$ et la projection canonique $t : \bar{G} \twoheadrightarrow \bar{G}^{\text{red}} \twoheadrightarrow \bar{G}^{\text{tor}}$. Les groupes \bar{G}^{u} et \bar{G}^{ss} sont des sous-groupes caractéristiques de \bar{G} et \bar{G}^{red} respectivement, alors le Corollaire 2.7.1.1 nous donne des k -liens (toujours notés κ) induits sur \bar{G}^{red} et \bar{G}^{tor} , et des applications canoniques

$$H^2(k, L) \rightarrow H^2(k, \bar{G}^{\text{red}}, \kappa) \rightarrow H^2(k, \bar{G}^{\text{tor}}, \kappa).$$

On appelle t_* cette composée. Le k -lien induit sur \bar{G}^{tor} est trivial car \bar{G}^{tor} est abélien, ce qui nous donne une k -forme G^{tor} de \bar{G}^{tor} et l'égalité $H^2(k, \bar{G}^{\text{tor}}, \kappa) = H^2(k, G^{\text{tor}})$.

Soient \bar{Z} , $\bar{Z}^{(\text{ss})}$ et $\bar{Z}^{(\text{sc})}$ les centres de \bar{G}^{red} , \bar{G}^{ss} et \bar{G}^{sc} respectivement. De la même façon que dans la Section 4.9, on trouve des k -formes respectives Z , $Z^{(\text{ss})}$ et $Z^{(\text{sc})}$. On rappelle que pour G un groupe réductif, on a $Z^{(\text{ss})} = Z \cap G^{\text{ss}}$ et $G = ZG^{\text{ss}}$, d'où on obtient la suite exacte

$$1 \rightarrow Z^{(\text{ss})} \rightarrow Z \rightarrow G^{\text{tor}} \rightarrow 1.$$

Cette suite induit la suite exacte de complexes

$$1 \rightarrow (Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z^{(\text{ss})}) \rightarrow (Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z) \rightarrow (1 \rightarrow G^{\text{tor}}) \rightarrow 1,$$

qui induit une suite exacte longue d'hypercohomologie, d'où on sort le morceau suivant

$$\mathbb{H}^2(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z^{(\text{ss})}) \rightarrow \mathbb{H}^2(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z) \rightarrow \mathbb{H}^2(k, 1 \rightarrow G^{\text{tor}}).$$

En notant que $(Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z^{(\text{ss})})$ est quasi-isomorphe au complexe $(\text{Ker}(\rho) \rightarrow 1)$, la Proposition 3.1.1 (iv) avec les Exemples 3.1.2 et la Définition 4.9.3 nous permettent de récrire cette suite comme

$$H^3(k, \text{Ker}(\rho)) \rightarrow H_{\text{ab}}^2(k, L) \xrightarrow{t_{\text{ab}}} H^2(k, G^{\text{tor}}). \quad (5.1.1)$$

Lemme 5.1.4. *La composition*

$$H^2(k, L) \xrightarrow{\text{ab}^2} H_{\text{ab}}^2(k, L) \xrightarrow{t_{\text{ab}}} H^2(k, G^{\text{tor}}),$$

coïncide avec l'application canonique $t_* : H^2(k, L) \rightarrow H^2(k, G^{\text{tor}})$.

Démonstration. On sait que les deux applications se factorisent par le morphisme $H^2(k, L) \rightarrow H^2(k, L^{\text{red}})$, donc on peut supposer L réductif.

On fixe $\eta_0 \in N^2(k, L)$ (qui est non vide, c.f. Proposition 4.8.1). On a $\eta_0 = \text{Cl}(\phi, 1)$ pour certain $\phi : \Gamma \rightarrow \text{SAut}(\bar{Z})$. On identifie $H^2(k, L)$ avec $H^2(k, Z)$ en identifiant $\xi = \text{Cl}(h)$ avec $\xi \cdot \eta_0 = \text{Cl}(\phi, h)$ (c.f. Section 2.6). En regardant la définition de t_* au moyen des cocycles (c.f. Section 2.7), on voit que le morphisme $H^2(k, Z) \rightarrow H^2(k, G^{\text{tor}})$ induit par t_* est le morphisme évident, i.e. celui induit par

$$\mathcal{C}^2(\Gamma, Z(\bar{k})) \xrightarrow{p_*^2} \mathcal{C}^2(\Gamma, G^{\text{tor}}(\bar{k}))$$

où p est le morphisme $Z \twoheadrightarrow G^{\text{tor}}$ donné plus en haut.

D'autre part, après identification de $H^2(k, L)$ et $H^2(k, Z)$, l'application ab^2 devient simplement le morphisme $j_*^2 : H^2(k, Z) \rightarrow H_{\text{ab}}^2(k, L)$ défini dans la Section 4.9. On veut analyser alors la composée $t_{\text{ab}} \circ j_*^2$. Or, cette composée, correspond à la composition des morphismes évidents d'hypercohomologie abélienne

$$\mathbb{H}^2(k, 1 \rightarrow Z) \rightarrow \mathbb{H}^2(k, Z^{(\text{sc})} \rightarrow Z) \rightarrow \mathbb{H}^2(k, 1 \rightarrow G^{\text{tor}}),$$

qui sont induites par les morphismes

$$1 \oplus \mathcal{C}^2(\Gamma, Z(\bar{k})) \xrightarrow{1 \oplus \text{id}} \mathcal{C}^3(\Gamma, Z^{(\text{sc})}(\bar{k})) \oplus \mathcal{C}^2(\Gamma, Z(\bar{k})) \xrightarrow{1 \oplus p_*^2} 1 \oplus \mathcal{C}^2(\Gamma, G^{\text{tor}}(\bar{k})).$$

On voit alors clairement que t_* et $t_{\text{ab}} \circ \text{ab}^2$ sont induites par p_*^2 , donc elles coïncident. \square

5.2 Un principe de Hasse pour H^2

Dans cette section, on fixe k un corps local non archimédien ou un corps de nombres et $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien connexe. Le Théorème 5.1.1 nous permet de montrer un principe de Hasse pour H^2 non abélien (Théorème 5.2.4).

On garde les notations de la section précédente.

Proposition 5.2.1. *On suppose que k est un corps local non archimédien. Alors une classe $\eta \in H^2(k, L)$ est neutre si et seulement si $t_*(\eta) = 0$.*

Démonstration. D'après le Lemme 5.1.4, on a $t_* = t_{\text{ab}} \circ \text{ab}^2$. On voit alors que si $\eta \in N^2(k, L)$, alors $t_*(\eta) = 0$. En sens inverse, supposons $t_*(\eta) = 0$. L'exactitude de la suite (5.1.1) nous dit alors que $\text{ab}^2(\eta)$ appartient à l'image de $H^3(k, \text{Ker}(\rho))$ dans $H_{\text{ab}}^2(k, L)$. Or, on sait que $\text{Ker}(\rho)$ est fini, donc $H^3(k, \text{Ker}(\rho)) = 0$ car k est un corps local non archimédien (c.f. Corollaire 1.5.4.1). On en déduit que $\text{ab}^2(\eta) = 0$, donc η est neutre d'après le Théorème 5.1.1. \square

Théorème 5.2.2. *Soit k un corps local non archimédien et $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien connexe. Supposons que au moins une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) G^{tor} est k -anisotrope ;
- (ii) $\bar{G}^{\text{tor}} = 1$;
- (iii) \bar{G} est semi-simple.

Alors toute classe de $H^2(k, L)$ est neutre.

Démonstration. C'est clair que (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i), donc il suffit de montrer le résultat pour le premier cas.

Comme G^{tor} est anisotrope, on a $H^0(k, (G^{\text{tor}})^\vee) = 1$. La dualité de Tate-Nakayama (c.f. Théorème 1.5.6) nous dit alors que $H^2(k, G^{\text{tor}}) = 1$. On conclut en utilisant la Proposition 5.2.1. \square

Corollaire 5.2.2.1. *Soit*

$$1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 1$$

une suite exacte de k -groupes. Supposons que G_1 est connexe et $G_1^{\text{tor}} = 1$. Alors l'application $H^1(k, G_2) \rightarrow H^1(k, G_3)$ est surjective.

Démonstration. D'après le Corollaire 2.9.1.2, il suffit de montrer que $H^2(\Gamma, G_1(\bar{k}) \text{ rel } G_2(\bar{k})) = N^2(\Gamma, G_1(\bar{k}) \text{ rel } G_2(\bar{k}))$. Or, ceci est clair d'après le Théorème 5.2.2 et la définition de $H^2(\Gamma, G_1(\bar{k}) \text{ rel } G_2(\bar{k}))$. \square

Après ces résultats pour les corps locaux, on passe aux corps de nombres. On fixe alors k un corps de nombres.

Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien. Pour une place $v \in \mathcal{V}$ (voir les notations au début), notons $\Gamma_v = \text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$. On a un morphisme $\iota_v : \Gamma_v \hookrightarrow \Gamma$ qui identifie Γ_v avec le sous-groupe de décomposition d'une extension de v . Cette application induit avec l'inclusion $\iota'_v : \bar{G}(\bar{k}) \hookrightarrow \bar{G}(\bar{k}_v)$ un k_v -lien que l'on note $L_v = (\bar{G}, \kappa_v)$. On définit alors une application

$$\text{loc}_v^2 : H^2(k, L) \rightarrow H^2(k, L_v),$$

qui associe à un cocycle $(f, g) \in Z^2(k, L)$, le cocycle $((f \circ \iota_v) \otimes k_v, \iota'_v \circ g \circ (\iota_v \times \iota_v)) \in Z^2(k_v, L_v)$, où la notation $\otimes k_v$ veut dire que l'on tensorise par k_v le diagramme (4.6.1) induit par f_σ pour obtenir un morphisme de k_v -schémas, comme il faut pour un k_v -lien (En gros, loc_v^2 est l'identité lorsqu'on identifie Γ_v avec un sous-groupe de Γ et $\bar{G}(\bar{k})$ avec un sous-groupe de $\bar{G}(\bar{k}_v)$).

Si l'on prend une autre inclusion de Γ_v dans Γ , on peut la factoriser en la composée de la première et un automorphisme de Γ_v . Alors, en utilisant le Lemme 4.7.2, on voit que l'application loc_v^2 est indépendante de l'inclusion choisie. On peut vérifier facilement (toujours au moyen des cocycles) que ces applications commutent avec les suites exactes données dans la Section 2.9.

Proposition 5.2.3. *Supposons que $\eta \in H^2(k, L)$ est neutre dans les places archimédiennes, i.e. $\text{loc}_v^2(\eta) \in N^2(k_v, L)$ pour $v \in \mathcal{V}_\infty$. Alors η est neutre si et seulement si $t_*(\eta) = 0$.*

Démonstration. On sait déjà que $t_*(\eta) = 0$ si η est neutre. Il suffit alors de montrer que si $t_*(\eta) = 0$, alors $\eta \in N^2(k, L)$. Considérons le morphisme canonique

$$\pi_1(\bar{G}) \rightarrow \pi_1(\bar{G}^{\text{tor}}).$$

Ce morphisme induit, avec les morphismes de localisation et la functorialité des H_{ab}^i , le diagramme commutatif suivant (c.f. aussi l'Exemple 4.3.4 (1)) :

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{ab}}^2(k, L) & \longrightarrow & H^2(k, G^{\text{tor}}) \\ \text{loc}_\infty \downarrow & & \downarrow \text{loc}_\infty \\ \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H_{\text{ab}}^2(k_v, L_v) & \longrightarrow & \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^2(k_v, G_v^{\text{tor}}). \end{array}$$

Ce diagramme nous donne un morphisme j de $H_{\text{ab}}^2(k, L)$ dans le produit fibré de $H^2(k, G^{\text{tor}})$ et $\prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H_{\text{ab}}^2(k_v, L_v)$ sur $\prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^2(k_v, G^{\text{tor}})$. On peut montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme (même dans un cas beaucoup plus général) en utilisant le foncteur \mathcal{H}^i (c.f. [Bo2, Proposition 4.11]).

Alors, si $t_*(\eta) = 0$, on a que l'image de $\text{ab}^2(\eta)$ dans $H^2(k, G^{\text{tor}})$ est zéro, car $t_* = t_{\text{ab}} \circ \text{ab}^2$. D'autre part, son image dans $\prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H_{\text{ab}}^2(k_v, L_v)$ est aussi 0 par hypothèse. On conclut alors que $\text{ab}^2(\eta) = 0$, ce qui donne le résultat d'après le Théorème 5.1.1. \square

Théorème 5.2.4 (Principe de Hasse pour H^2). *Soit k un corps de nombres et $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien connexe. Supposons que au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) $\text{III}^2(k, G^{\text{tor}}) = 0$;
- (ii) *Le k -tore G^{tor} vérifie l'une des conditions du Lemme 5.1.2 ;*
- (iii) $\bar{G}^{\text{tor}} = 1$;
- (iv) \bar{G} est semi-simple.

Alors une classe $\eta \in H^2(k, L)$ est neutre si et seulement si ses localisations $\text{loc}_v^2(\eta) \in H^2(k_v, L_v)$ sont neutres pour toute place $v \in \mathcal{V}$.

Démonstration. Si η est neutre, alors $\text{loc}_v^2(\eta)$ est neutre pour toute $v \in \mathcal{V}$. Il suffit de voir la définition de loc^2 au moyen des cocycles. Supposons alors $\text{loc}_v^2(\eta) \in N^2(k_v, L_v)$ pour toute place v . On a que $\text{loc}_v^2(t_*(\eta)) = t_*(\text{loc}_v^2(\eta)) = 0$, donc $t_*(\eta) \in \text{III}^2(k, G^{\text{tor}}) = 0$ d'après les hypothèses (les conditions (i)-(iv) impliquent que $\text{III}^2(k, G^{\text{tor}}) = 0$). On conclut par la Proposition 5.2.3. \square

Corollaire 5.2.4.1. *Soit k un corps de nombres totalement imaginaire et $L = (\bar{G}, \kappa)$ un k -lien semi-simple connexe. Alors toute classe de $H^2(k, L)$ est neutre.*

Démonstration. D'après le Théorème 5.2.4 (iv), $\eta \in H^2(k, L)$ est neutre si et seulement si $\text{loc}_v^2(\eta) \in N^2(k_v, L_v)$ pour toute place $v \in \mathcal{V}$. Comme k est totalement imaginaire, on a que $\text{loc}_v^2(\eta)$ est trivial pour $v \in \mathcal{V}_\infty$. Pour les places non archimédiennes, le Théorème 5.2.2 (iii) nous dit que $\text{loc}_v^2(\eta)$ est bien neutre, ce qui conclut la preuve. \square

Corollaire 5.2.4.2. *Soit*

$$1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 1$$

un suite exacte de k -groupes linéaires avec k un corps de nombres. Supposons que G_1 est connexe et en plus $\dim(G_1^{\text{tor}}) \leq 1$. Pour $\xi \in H^1(k, G_3)$, si $\text{loc}_v^1(\xi) \in H^1(k_v, G_3)$ vient de $H^1(k_v, G_2)$ pour toute place $v \in \mathcal{V}$, alors ξ vient de $H^1(k, G_2)$.

Démonstration. On sait, d'après le Corollaire 2.9.1.2, que ξ vient de $H^1(k, G_2)$ si et seulement si l'image de ξ dans $H^2(\Gamma, G_1(\bar{k}) \text{ rel } G_2(\bar{k}))$ est neutre. Le Théorème 5.2.4 (iii) nous dit que ceci est vrai si et seulement si l'image de $\text{loc}_v^1(\xi)$ dans $H^2(\Gamma_v, G_1(\bar{k}) \text{ rel } G_2(\bar{k}))$ est neutre pour toute $v \in \mathcal{V}$. Or, toujours par le Corollaire 2.9.1.2, ξ vérifie ceci par hypothèse. \square

5.3 Un principe de Hasse pour les espaces homogènes

Les résultats importants de cette section sont les Théorèmes 5.3.1 et 5.3.2. On donne aussi quelques corollaires du Théorème 5.3.2.

Soit H un k -groupe semi-simple simplement connexe. Soit X un espace homogène à droite sur H . C'est la même notion que dans la Section 2.2 à cela près qu'on demande que l'application

$$X \times H \rightarrow X, (x, h) \mapsto x \cdot h,$$

soit un morphisme de k -variétés. La transitivité se voit au niveau des \bar{k} -points. On remarque que celle-ci est la bonne notion pour k de caractéristique 0.

Tout comme dans la Section 2.8, on associe à X un élément $\delta^1(X) \in H^2(\Gamma, \bar{G}(\bar{k}) \text{ rel } H(\bar{k}))$. En effet, on peut voir X comme un élément de l'ensemble $H^1(\Gamma, H(\bar{k}), \bar{G}(\bar{k}))$, que l'on note $H^1(k, H, \bar{G})$ pour abrégé. Alors l'élément $\delta^1(X)$ est bien défini d'après la construction faite dans cette section.

On veut savoir si X a un point rationnel. Soit $x \in X(\bar{k})$ un \bar{k} -point et soit \bar{G} son stabilisateur dans $H_{\bar{k}}$. Ce groupe n'est pas en général défini sur k . On rappelle que l'on a une k -forme G^{tor} de \bar{G}^{tor} (c.f. Section 5.1).

Théorème 5.3.1. *Soit k un corps local non archimédien, H un k -groupe semi-simple simplement connexe et X un espace homogène à droite sur H . Supposons que le stabilisateur \bar{G} d'un point $x \in X(\bar{k})$ est connexe et que au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) *Le k -tore G^{tor} est k -anisotrope ;*
- (ii) *$\bar{G}^{\text{tor}} = 1$;*
- (iii) *\bar{G} est semi-simple.*

Alors X a un k -point.

Théorème 5.3.2 (Un principe de Hasse). *Soit k un corps de nombres, H un k -groupe semi-simple simplement connexe et X un espace homogène à droite sur H . Supposons que le stabilisateur \bar{G} d'un point $x \in X(\bar{k})$ est connexe et que au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) *$\text{III}^2(k, G^{\text{tor}}) = 0$;*
- (ii) *G^{tor} vérifie l'une des conditions du Lemme 5.1.2 ;*
- (iii) *$\bar{G}^{\text{tor}} = 1$;*
- (iv) *\bar{G} est semi-simple.*

Alors le principe de Hasse est vérifié pour X , i.e. si $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place $v \in \mathcal{V}$, alors $X(k) \neq \emptyset$.

Corollaire 5.3.2.1. *Dans les cas (iii) et (iv) du Théorème 5.3.2, si $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place $v \in \mathcal{V}_\infty$, alors $X(k) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Ceci découle directement des Théorèmes 5.3.2 (iii), (iv) et 5.3.1 (ii), (iii). \square

Corollaire 5.3.2.2. *Si X est une variété projective, alors le principe de Hasse est vérifié pour X .*

Démonstration. Comme X est projective, \bar{G} est un sous-groupe parabolique de $H_{\bar{k}}$. Harder montre alors que G^{tor} est quasi-trivial (c.f. [Ha, 4.3.3, Lemma]). Le résultat découle alors du Théorème 5.3.2 (ii). \square

Corollaire 5.3.2.3. *Si X est un espace homogène symétrique sur H un k -groupe simple simplement connexe (i.e. \bar{G} est le groupe des invariants d'une involution de $H_{\bar{k}}$), alors le principe de Hasse est vérifié pour X .*

Démonstration. Sous ces hypothèses, on peut montrer que \bar{G} est connexe (c.f. [St, Theorem 8.1]). On peut aussi montrer, en utilisant la classification des involutions des algèbres de Lie simples (c.f. [He, Chapter X, §5]), que $\dim(\bar{G}^{\text{tor}}) \leq 1$. Le résultat découle alors du Théorème 5.3.2 (ii). \square

Démontrons maintenant les Théorèmes 5.3.1 et 5.3.2.

On regarde toujours X comme un élément de $H^1(k, H, \bar{G})$. L'existence d'un k -point sur X équivaut à dire que X est représenté, comme élément de $H^1(k, H, \bar{G})$, par le cocycle trivial. En effet, si l'on a un point x_0 induisant le cocycle $a_\sigma = 1$, on a bien ${}^\sigma x_0 = x_0 \cdot a_\sigma = x_0$ et donc $x_0 \in X(\bar{k})^\Gamma = X(k)$. De même, un k -point induit clairement le cocycle 1. En plus, c'est clair que le cocycle 1 appartient à $H^1(k, H)$. Alors X a un k -point si et seulement si $p_*^1(1) = X$, où p_*^1 est la relation définie dans la Section 2.4.

Pour montrer le Théorème 5.3.1, on utilise le lemme suivant.

Lemme 5.3.3. *Soient k, H et X comme dans le Théorème 5.3.1. Supposons qu'il existe $P \in H^1(k, H)$ tel que $p_*^1(P) = X$. Alors X a un k -point.*

Démonstration. Lorsque k est un corps local non archimédien, tout élément de $H^1(k, H)$ est trivial pour H semi-simple simplement connexe (c.f. [PR, Theorem 6.4]). Alors $P = 1$ et donc $p_*^1(1) = X$, ce qui conclut. \square

Démonstration du Théorème 5.3.1. D'après le Lemme 5.3.3, il suffit de montrer l'existence d'un $P \in H^1(k, H)$ tel que $p_*^1(P) = X$. L'exactitude de la suite de la Proposition 2.9.1 nous dit que ceci est vérifié si et seulement si $\delta^1(X)$ est neutre, ce qui est clairement vérifié d'après le Théorème 5.2.2. \square

Pour montrer le Théorème 5.3.2, on utilise encore un lemme.

Lemme 5.3.4. *Soient k, H, X et G comme dans le Théorème 5.3.2. Supposons que $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place $v \in \mathcal{V}_\infty$ et qu'il existe un $P \in H^1(k, H)$ tel que $p_*^1(P) = X$. Alors X a un k -point.*

Démonstration. On veut montrer que $p_*^1(1) = X$. On sait que l'application

$$\text{loc}_\infty^1 : H^1(k, H) \rightarrow \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, H),$$

envoie la classe d'un cocycle dans $Z^1(k, H)$ dans la classe du même cocycle dans $Z^1(k_v, H)$ lorsqu'on identifie Γ_v avec un sous-groupe de Γ et $H(\bar{k})$ avec un sous-groupe de $H(\bar{k}_v)$. La même formule induit une application

$$\text{loc}_\infty^1 : H^1(k, H, \bar{G}) = H^1(\Gamma, H(\bar{k}), \bar{G}(\bar{k})) \rightarrow \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(\Gamma_v, H(\bar{k}_v), \bar{G}(\bar{k}_v)) = \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, H, \bar{G}).$$

On voit facilement alors qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, H) & \xrightarrow{p_*^1} & H^1(k, H, \bar{G}) \\ \text{loc}_\infty^1 \downarrow & & \downarrow \text{loc}_\infty^1 \\ \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, H) & \xrightarrow{p_*^1} & \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, H, \bar{G}) \end{array}$$

Tordons ce diagramme par P (ou bien, par un cocycle dans $Z^1(k, H)$ représentant P). Notons ${}_P\eta$ la préimage de η par le morphisme τ_P (c.f. Proposition 2.3.4) pour η dans les ensembles du diagramme. On a clairement ${}_P P = 1$, donc ${}_P X = 1 \in H^1(k, {}_P H, \bar{G})$. Ceci nous dit (c.f. Section 2.4) que $\bar{G}(\bar{k})$ est Γ -invariant pour cette nouvelle action et on a une suite exacte

$$H^1(k, {}_P G) \rightarrow H^1(k, {}_P H) \rightarrow H^1(k, {}_P H, \bar{G}),$$

où ${}_P G$ est simplement la k -forme de \bar{G} défini par l'action tordue de Γ . Comme $\text{loc}_v^1({}_P X) = \text{loc}_v^1(1) = 1 \in H^1(k_v, {}_P H, \bar{G})$ pour tout $v \in \mathcal{V}_\infty$, le même raisonnement nous donne une suite exacte avec les $\prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, -)$. On a alors le diagramme commutatif à lignes exactes suivant.

$$\begin{array}{ccccc} H^1(k, {}_P G) & \xrightarrow{P^1} & H^1(k, {}_P H) & \xrightarrow{{}_P p_*^1} & H^1(k, {}_P H, \bar{G}) \\ \downarrow \text{loc}_\infty^1 & & \downarrow \text{loc}_\infty^1 & \searrow \tau_P & \downarrow \text{loc}_\infty^1 \\ \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, {}_P G) & \xrightarrow{P^1} & \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, {}_P H) & \xrightarrow{{}_P p_*^1} & \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, {}_P H, \bar{G}) \\ & & \downarrow \text{loc}_\infty^1 & \searrow \tau_P & \downarrow \text{loc}_\infty^1 \\ & & \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, H) & \xrightarrow{p_*^1} & \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, H, \bar{G}) \end{array}$$

La torsion en bas à bien un sens lorsqu'on regarde P comme un élément de $H^1(k_v, H)$ à travers de loc_v^1 pour chaque $v \in \mathcal{V}_\infty$. La commutativité se voit facilement au moyen des cocycles.

D'après le diagramme, montrer que $p_*^1(1) = X$ est équivalent à montrer que ${}_P p_*^1({}_P 1) = {}_P X = 1$. Or, si on note X_v l'image de X par loc_v^1 , l'image de ${}_P 1$ dans $\prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, H)$ est $\prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} 1$, qui est relié par p_*^1 avec $\prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} X_v$ car les X_v ont un k_v -point par hypothèse. Alors $\text{loc}_\infty^1({}_P 1)$ est relié par ${}_P p_*^1$ avec $\prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} {}_P X_v = 1 \in \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, {}_P H, \bar{G})$. L'exactitude de la ligne en bas nous dit alors que $\text{loc}_\infty^1({}_P 1)$ vient d'un élément $\xi_\infty \in \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, {}_P G)$. D'après [PR, Proposition 6.17] et la connexité de \bar{G} , l'application

$$\text{loc}_\infty^1 : H^1(k, {}_P G) \rightarrow \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, {}_P G),$$

est surjective, donc il existe un élément $\xi \in H^1(k, {}_P G)$ s'envoyant sur ξ_∞ . On a alors que $P^1(\xi)$ et ${}_P 1$ ont la même image dans $\prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, {}_P H)$. Les applications τ_P étant des bijections et l'application

$$\text{loc}_\infty^1 : H^1(k, H) \rightarrow \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, H)$$

étant aussi bijective d'après le principe de Hasse pour H^1 sur les groupes simplement connexes (c.f. [PR, Theroem 6.6]), on trouve que

$$\text{loc}_\infty^1 : H^1(k, {}_P H) \rightarrow \prod_{v \in \mathcal{V}_\infty} H^1(k_v, {}_P H)$$

est aussi une bijection. Alors ${}_P \iota_*^1(\xi) = {}_P 1$, ce qui nous dit que ${}_P p_*^1({}_P 1) = 1$ par exactitude et conclut la preuve. \square

Démonstration du Théorème 5.3.2. D'après le Lemme 5.3.4, il suffit de montrer l'existence d'une classe $P \in H^1(k, H)$ telle que $p_*^1(P) = X$. La Proposition 2.9.1 nous dit que ceci est vérifié si et seulement si $\delta^1(X)$ est neutre. Or, par hypothèse on a que $\text{loc}_v^2(\delta^1(X))$ est neutre pour toute place $v \in \mathcal{V}$ (car la classe $X_v = \text{loc}_v^1(X)$ est déjà triviale). Alors le principe de Hasse pour H^2 (Théorème 5.2.4) nous dit que $\delta^1(X)$ est bien neutre, ce qui conclut la preuve. \square

Remarques.

Dans cette dernière démonstration on a utilisé le fait que l'application δ^1 commute avec les applications loc^1 et loc^2 . Ceci peut se voir facilement d'après la construction de δ^1 au moyen des cocycles et le fait que loc^1 et loc^2 sont réduites à l'identité lorsqu'on identifie Γ_v avec un sous-groupe de Γ et $\bar{G}(\bar{k})$, $H(\bar{k})$ avec les sous-groupes respectifs de $\bar{G}(\bar{k}_v)$, $H(\bar{k}_v)$.

Borovoi démontre ces deux résultats dans son article [Bo1] en utilisant le langage des espaces homogènes principaux au dessus de X . Un tel espace est une paire (P, α) où P est un espace homogène principal (i.e. à stabilisateur nul) et $\alpha : P \rightarrow X$ est un morphisme d'espaces homogènes (c.f. Section 2.2) défini sur k . L'existence d'un tel espace n'est pas toujours vérifiée. En effet, on voit clairement que P correspond à un élément de $H^1(k, H)$. Alors P est un tel espace si et seulement si $p_*^1(P) = X$, d'où l'utilisation de la lettre P pour parler d'une telle classe dans $H^1(k, H)$.

Références

- [BH] **Brown, R. ; Huebschmann, J.** Identities among relations. *Low-dimensional topology (Bangor, 1979)*, pp. 153–202, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 48, *Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York*, 1982.
- [Bo1] **Borovoi, Mikhail** Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology. *Duke Math. J.* 72 (1993), no. 1, 217–239.
- [Bo2] **Borovoi, Mikhail** Abelian Galois cohomology of reductive groups. *Mem. Amer. Math. Soc.* 132 (1998), no. 626.
- [Bo3] **Borovoi, Mikhail** Non-abelian hypercohomology of a group with coefficients in a crossed module, and Galois cohomology. *Preprint, Bonn*, 1992 (<http://www.math.tau.ac.il/~borovoi/papers>).
- [Bo4] **Borovoi, Mikhail** The Hasse principle for homogeneous spaces. *J. Reine Angew. Math.* 426 (1992), 179–192.
- [Br] **Brown, Ronald** Some nonabelian methods in homotopy theory and homological algebra. *Categorical topology (Toledo, Ohio, 1983)*, 108–146, Sigma Ser. Pure Math., 5, *Heldermann, Berlin*, 1984.
- [BT] **Borel, Armand ; Tits, Jacques** Groupes réductifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. 27 1965 55–150.
- [CT] **Colliot-Thélène, Jean-Louis** Résolutions flasques des groupes linéaires connexes. *J. Reine Angew. Math.* 618 (2008), 77–133.
- [Do1] **Douai, Jean-Claude** 2-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples définis sur les corps locaux. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 280 (1975), no. 6, Aii, A321–A323.
- [Do2] **Douai, Jean-Claude** Cohomologie galoisienne des groupes semi-simples définis sur les corps globaux. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 281 (1975), no. 24, Ai, A1077–A1080.
- [FSS] **Flicker, Yuval Z. ; Scheiderer, Claus ; Sujatha, R.** Grothendieck’s theorem on non-abelian H^2 and local-global principles. *J. Amer. Math. Soc.* 11 (1998), no. 3, 731–750.
- [Ha] **Harder, Günter** Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie halbeinfacher Gruppen. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* 70 1967/1968 Heft 4, Abt. 1, 182–216.
- [He] **Helgason, Sigurdur** Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Pure and Applied Mathematics, 80. *Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London*, 1978.
- [Hu] **Humphreys, James E.** Linear algebraic groups. Graduate Texts in Mathematics, No. 21. *Springer-Verlag, New York-Heidelberg*, 1975.
- [Mi] **Milne, James S.** Étale cohomology. Princeton Mathematical Series, 33. *Princeton University Press, Princeton, N.J.*, 1980.
- [ML] **Mac Lane, Saunders** Homology. Reprint of the 1975 edition. Classics in Mathematics. *Springer-Verlag, Berlin*, 1995.
- [NSW] **Neukirch, Jürgen ; Schmidt, Alexander ; Wingberg, Kay** Cohomology of number fields. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 323. *Springer-Verlag, Berlin*, 2000.
- [PR] **Platonov, Vladimir ; Rapinchuk, Andrei** Algebraic groups and number theory (Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen). Pure and Applied Mathematics, 139. *Academic Press, Inc., Boston, MA*, 1994.
- [Sa] **Sansuc, Jean-Jacques** Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. *J. Reine Angew. Math.* 327 (1981), 12–80.

- [Se1] **Serre, Jean-Pierre** Cohomologie galoisienne. Fifth edition. Lecture Notes in Mathematics, 5. *Springer-Verlag, Berlin*, 1994.
- [Se2] **Serre, Jean-Pierre** Groupes algébriques et corps de classes. Deuxième édition. Publication de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. VII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1264. *Hermann, Paris*, 1975.
- [Se3] **Serre, Jean-Pierre** Local fields. Graduate Texts in Mathematics, 67. *Springer-Verlag, New York-Berlin*, 1979.
- [Sp1] **Springer, T. A.** Nonabelian H^2 in Galois cohomology. 1966 *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)* pp. 164–182 *Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*
- [Sp2] **Springer, T. A.** Linear algebraic groups. Second edition. Progress in Mathematics, 9. *Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA*, 1998.
- [Sp3] **Springer, T. A.** Reductive groups. *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, pp. 3–27, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, *Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 1979.
- [St] **Steinberg, Robert** Endomorphisms of linear algebraic groups. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80 *American Mathematical Society, Providence, R.I.* 1968.
- [Wa] **Waterhouse, William C.** Introduction to affine group schemes. Graduate Texts in Mathematics, 66. *Springer-Verlag, New York-Berlin*, 1979.
- [We] **Weibel, Charles A.** An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1994.